

На правах рукописи

ТАРАСОВ Сергей Владимирович

**АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ
И СТАТИСТИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН
В КРИТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ
БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКОЙ КОНДЕНСАЦИИ
ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА В МЕЗОСКОПИЧЕСКИХ
СИСТЕМАХ**

01.04.03 — радиофизика,
01.04.07 — физика конденсированного состояния

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород — 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном научном учреждении «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики» Российской академии наук (г. Нижний Новгород).

Научный руководитель:

Кочаровский Владимир Владиленович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики» Российской академии наук (ИПФ РАН).

Официальные оппоненты:

Сатанин Аркадий Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, и. о. зав. кафедрой теоретической физики, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского» (ННГУ);

Собьянин Денис Николаевич, кандидат физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Физический институт имени П.Н. Лебедева» Российской академии наук (ФИАН).

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт спектроскопии» Российской академии наук (ИСАН).

Защита диссертации состоится 28 июня 2016 года в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 002.069.02 в Институте прикладной физики РАН по адресу: 603950, г. Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Института прикладной физики РАН и на официальном сайте Института прикладной физики РАН <http://www.iapras.ru/training/img/2016/Tarasov.pdf>.

Автореферат разослан «___» мая 2016 года.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук,
профессор



Ю.В. Чугунов

Актуальность темы диссертации

Одним из центральных и до сих пор не решенных вопросов современной теоретической физики является построение микроскопической теории фазового перехода многочастичных систем из неупорядоченной в упорядоченную фазу. Искомая теория должна позволить непрерывно проследить за эволюцией свойств системы при таком переходе через всю критическую область ее параметров. Исключительная сложность проблемы связана с тем, что процесс фазовых переходов включает одновременное действие целого ряда факторов, правильный учет каждого из которых в общем случае уже является почти непреодолимой преградой в теоретической физике. К указанным факторам относятся многочастичность и одновременно мезоскопичность системы, межчастичное взаимодействие и наличие дальних корреляций, критическая зависимость от размерности пространства и нерешенность трехмерной задачи, наличие неустойчивых мод, нелинейное насыщение неустойчивости на макроскопическом уровне, спонтанное нарушение симметрии, наличие связей (ограничений) в гильбертовом пространстве системы, аномально сильные флуктуации параметра порядка. Известные методы теории среднего поля, теории возмущений, квантовой теории поля и стандартной диаграммной техники, ренормализационной группы не позволили решить эту проблему.

Описание статистических и термодинамических величин в критической области бозе-эйнштейновской конденсации (БЭК) идеального газа является частным случаем обозначенной задачи, позволяющим выделить из этого многообразия и детально изучить два отдельных фактора. Первым из них является мезоскопичность системы, т. е. ее конечность, ведущая к зависимости решения от размеров и формы ловушки. Вторым — условие фиксированности числа частиц в ловушке, накладывающее жесткое ограничение на описывающее систему гильбертово пространство. Оба эти фактора пока не удалось корректно учесть при наличии прямого межчастичного взаимодействия: многочисленные работы по БЭК в мезоскопических системах основываются преимущественно на численных расчетах, например, с привлечением методов Монте-Карло [1–3], либо на известных уравнениях Гросса-Питаевского, Беляева-Попова и их обобщениях [4, 5], справедливых лишь в низкотемпературной фазе развитого конденсата и не применимых в критической области.

Обе указанные черты безусловно присущи многочисленным современным экспериментам с бозе-газом и могут ярко (и весьма индивидуально) проявляться в физике конденсированного состояния. Действительно, вариативность лабораторного изучения атомных систем существенно выросла со времени первых наблюдений [6, 7] атомного бозе-конденсата.

Сейчас стало возможным изменять в широких пределах как число загруженных в ловушку частиц (типичные числа атомов составляют $10^2 - 10^8$, см. обзоры [8, 9]) и силу межчастичного взаимодействия [10] (используются резонансы Фешбаха), так и профиль удерживающего потенциала [11] и, в частности, его размерность и анизотропные свойства [12, 13]. Существуют установки-ловушки с квазивертикальными стенками [14] и квазиоднородным потенциалом [15]. Кроме того, бозе-конденсация наблюдается не только в атомных системах, но и для квазичастиц в конденсированных средах — магнонов, экситонов, поляритонов, фотонов [16–20], — свойства которых, как и параметры содержащих их ловушек, также весьма разнообразны. Эта вариативность делает бозе-конденсацию привлекательной для обнаружения новых физических эффектов и открывает перспективы для оптимизации и разработки систем, использующих когерентные свойства бозе-конденсатов для решения практических задач, например, сверхточной интерферометрии [21], квантовой информатики [22] и др.

Однако для реализации открывающихся возможностей необходимо построить последовательную теорию, включающую описание действия выделенных для идеального газа факторов. В частности, необходимо учитывать неэквивалентность описаний в рамках канонического, большого канонического и микроканонического ансамблей, а также зависимость свойств системы от числа атомов в ловушке, граничных условий и геометрии удерживающего потенциала. Эти особенности БЭК существенны в критической области параметров между конденсированной и неконденсированной фазами, которая в реальных экспериментах оказывается достаточно широкой и доступной для детальных измерений.

Условие фиксированности числа частиц при описании бозе-систем заслуживает отдельного обсуждения, так как именно этому условию обязано существование явления БЭК. Например, фотоны в черном ящике не испытывают БЭК при охлаждении, так как их число в системе не фиксировано: вместо того, чтобы накапливаться в низшей энергетической моде, они поглощаются стенками. И только создание резонатора с „белыми“, непоглощающими стенками позволило реализовать БЭК фотонов, зафиксировав число возбуждений в системе (т.е. совокупное число фотонов и возбужденных молекул красителя, заполняющих резонатор) [23, 24].

Попытка заменить условие сохранения полного числа частиц в системе более мягким условием сохранения их среднего числа, т.е. попытка заменить микроканонический или канонический ансамбль большим каноническим, мгновенно приводит к так называемой „флуктуационной катастрофе“ [25]: среднеквадратичное отклонение числа частиц на основном уровне при сколь угодно низких температурах оказывается порядка ожи-

даемого числа частиц на этом уровне, что противоречит представлению о сформировавшейся макроскопической конденсированной фракции. Причина данного парадокса, который с самого начала рассматривался как любопытный математический артефакт модели большого канонического ансамбля, заключается в отсутствии надлежащего учета жесткой корреляции между числами надконденсатных и конденсированных частиц.

Даже для идеального газа вплоть до недавнего времени не существовало аналитического решения, дававшего непрерывное описание возникновения БЭК при переходе через критическую точку.

В приближении большого канонического ансамбля, допускающего обмен частицами с резервуаром, было известно явное описание БЭК идеального газа в ловушках с простой геометрией, однако его применение в критической области физически не обосновано [8, 25–27] и приводит при вычислении статистики к ошибкам, связанным с упомянутой „флуктуационной катастрофой“.

В определенной мере преодолеть вычислительные сложности при описании статистики бозе-системы в фазе развитого конденсата удалось с помощью приближенного метода так называемого статистического „ансамбля демона Максвелла“ (предложен в [28] и существенно развит для мезоскопических систем в [29]). Этот метод предполагает при температурах T много ниже критической T_c описывать с помощью большого канонического ансамбля подсистему частиц на возбужденных (т. е. всех, кроме основного) уровнях, рассматривая сильно населенную конденсированную фракцию как резервуар частиц; статистика числа частиц в конденсате при этом определяется как раз из условия жесткого сохранения полного числа частиц в системе. Однако такое искусственное применение ограничения не позволяет подойти к критической области, где относительный вес конденсированной фракции не так велик.

Попытки построения описания мезоскопической БЭК идеального газа в рамках канонического ансамбля, естественным образом учитывающего неизменность полного числа атомов в системе, предпринимались многократно, но либо приводили к неверным ответам [30, 31], либо не давали явных выражений для характеристик системы [32], либо использовали предположения, позволяющие определить только асимптотические свойства системы вдали от критической точки [33]. Достигнутое в работах [34, 35] продвижение в учете неаналитичности, вносимой в задачу условием фиксированности числа частиц, к сожалению, не было распространено на критическую область параметров БЭК. Основным способом исследования бозе-системы в рамках канонического ансамбля оставались численные расчеты [3, 36, 37], основанные на рекуррентных соотношении-

ях [38] для статистической суммы и дающие результаты в том числе и в критической области, но не позволяющие глубоко разобраться в процессе ее формирования. Указанная проблема учета взаимозависимости чисел заполнения уровней по существу была нерешенной вплоть до работы [39] и ее развития в работах [A1, A2], служащих основой диссертации.

Особого внимания требует мезоскопичность системы. В статистической физике существует парадигма — изучать статистику и термодинамику системы сразу и только в термодинамическом пределе. Для БЭК сказанное означает предельный переход к бесконечному размеру ловушки и числу частиц в ней, сохраняющий неизменной концентрацию частиц. Формально это упрощает расчеты: различные суммы по уровням энергии заменяются интегралами и иногда вычисляются, а различные статистические ансамбли становятся эквивалентными [40, 41]. Однако в критической области фазовых переходов такой подход неверен, причем не только количественно. Он упускает главный факт и объект исследования критических явлений — саму структуру физических характеристик БЭК в критической области. Эта структура оказывается огрубленной до примитивного разрыва термодинамических величин или их производных в критической точке. Так, данный подход предсказывает скачок теплоемкости в критической точке и не разрешает плавную λ -структуру фазового перехода. Последний в реальных мезоскопических системах всегда является плавным, что подчеркивал ещё Эренфест, критикуя Эйнштейна.

Эта проблема не раз обсуждалась, в основном, с целью уточнения тонкостей предельного перехода, зависящего, например, от последовательности устремления к бесконечности различных параметров системы. Использовались численные расчеты конечных бозе-систем [36, 42] или их комбинация с аналитическими методами, применимыми для ловушек специальной геометрии [43, 44]. В итоге констатировалось, что с увеличением системы все термодинамические величины стремятся к предельным функциям, испытывающим разрывы или изломы. Ход стремления зависит от геометрии системы и может быть сложным. Например, для теплоемкости газа в ящике с непроницаемыми стенками наблюдается как смещение положения её максимума по температурной оси T/T_c , так и немонотонное изменение величины максимума [36]. Не удивительно, что сделать достаточно конкретные выводы об устройстве критической области, о ее автомодельных свойствах такими методами не удалось.

Что касается феноменологической теории ренормгруппы и масштабной инвариантности [40, 45], то они до сих пор не дают исчерпывающего описания явлений в критической области и не располагают регулярными подходами, которые, исходя из микроскопического гамильтониана мезо-

скопической системы, позволяли бы замкнутым способом вывести универсальные значения критических индексов и вычислить неуниверсальные характеристики фазового перехода. Для решения указанных задач продолжают использоваться численные расчеты методом Монте-Карло и аппроксимации по первым членам их ряда Тейлора с включением поправок на неопределяющие закон подобия поля (см. обсуждение в [A5]).

Цель и задачи диссертационной работы

Непосредственной темой работы является теоретическое исследование критических явлений в идеальном бозе-газе атомов, помещенных в ловушку конечных размеров. Основная цель работы — создание микроскопической теории статистических и термодинамических свойств бозе-конденсации невзаимодействующих атомов в мезоскопической ловушке для всей критической области параметров газа и произвольного удерживающего потенциала. Для реализации этой цели поставлены задачи:

- 1) изучение автомодельных характеристик критических явлений бозе-эйнштейновской конденсации;
- 2) описание статистических свойств бозе-системы на основе анализа вероятностного распределения числа несконденсированных частиц в ловушке;
- 3) описание термодинамических свойств бозе-системы, включая тонкую структуру λ -особенности теплоемкости;
- 4) исследование зависимости свойств бозе-системы и описывающих их автомодельных критических функций от профиля и размерности удерживающего газ потенциала;
- 5) сравнение и установление неэквивалентности описаний критических явлений на основе канонического ансамбля, точно фиксирующего число частиц в системе, и большого канонического ансамбля, для которого фиксируется лишь среднее число частиц в системе.

Научная новизна работы

Задача построения микроскопической теории критических явлений бозе-эйнштейновской конденсации идеального газа в произвольной мезоскопической ловушке, включающая полное описание статистических и термодинамических свойств системы, была решена впервые. Аналитически найдены универсальные автомодельные критические функции, описывающие флуктуации и термодинамические свойства газа в критической области, в том числе форму λ -особенности теплоемкости. Установлено, что эти функции существенно зависят от профиля удерживающего газ потенциала и граничных условий даже в термодинамическом пределе макроскопически большой системы. Явно показано, что канонический и большой канонический ансамбли дают неэквивалентные описания явления бозе-эйнштейновской конденсации.

Научная и практическая значимость результатов

В теории конденсированного состояния точное решение задачи о фазовом переходе второго рода для всей критической области известно лишь для очень небольшого числа моделей, обычно отвечающих гамильтонианам весьма специфичного вида и предоставляющих довольно ограниченные возможности варьирования параметров изучаемой системы (например, двумерная задача Изинга или восьмивершинная модель Бакстера).

В рамках диссертационного исследования этот список был пополнен общим решением задачи о бозе-эйнштейновской конденсации идеального газа, удерживаемого в мезоскопической ловушке. Полученное точное решение, исследованное методами статистической радиофизики, применимо для весьма широкого класса бозе-систем, включая удерживающие газ потенциалы произвольных размерности и профиля.

Детально изучено влияние граничных условий и геометрических свойств ловушки на статистические и термодинамические характеристики удерживаемого ей бозе-газа, что может служить основой интерпретации готовящихся и уже проведенных экспериментов со слабовзаимодействующими атомами и позволит оптимизировать конфигурации ловушек при планировании новых экспериментов.

Разработанные в диссертации аналитические методы делают возможным строгий учет ограничений, которые накладываются на соответствующее системе гильбертово пространство состояний частиц тем или иным условием на полное число частиц в системе. Эти методы перспективны для применения и в других задачах о фазовых переходах, где ограничения на гильбертово пространство имеют принципиальный характер. К таким задачам относится, например, описание бозе-конденсации газа с межчастичными взаимодействиями.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Задача аналитического описания фазового перехода бозе-эйнштейновской конденсации идеального газа в произвольной мезоскопической ловушке в рамках канонического ансамбля имеет точное решение. Оно выражается через решение вспомогательной задачи о статистике населенности надконденсата в большом каноническом ансамбле с нулевым химическим потенциалом. Эта вспомогательная задача решается методом характеристической функции в спектральном представлении, полностью охватывающим критическую область параметров системы и последовательно учитывающим форму удерживающего потенциала.

2. Критические явления описываются автомодельной переменной, являющейся определенной комбинацией температуры, числа частиц, их массы и параметров ловушки. Эта переменная определяет масштаб и ко-

нечную ширину критической области, в том числе и в термодинамическом пределе, а также выявляет близкую к автомоделной статистику флуктуаций системы. Масштабированные вероятностные распределения числа частиц в конденсате и в надконденсате при увеличении размера системы быстро сходятся к автомоделным распределениям, не зависящим от значений каких-либо размерных параметров ловушки и определяемым лишь формой удерживающего потенциала через закон нарастания спектральной плотности состояний с ростом энергии. Зависимость автомоделных функций от профиля потенциала отражает существование ловушек двух универсальных классов — гауссова и аномального — с сильно отличающимися статистическими свойствами бозе-газа.

3. В рамках канонического ансамбля зависимости термодинамических величин от параметров системы являются плавными и описывают непрерывную, без скачков, эволюцию ее свойств при прохождении через критическую область параметров. В пределе бесконечно больших систем поведение термодинамических характеристик бозе-газа сводится к автомоделным критическим функциям, конкретный вид которых определяется геометрическими свойствами удерживающего потенциала.

4. Для аномального класса ловушек, обеспечивающих наличие существенных высших (негауссовых) моментов распределения числа частиц в конденсате, термодинамические свойства системы и соответствующие автомоделные критические функции зависят от особенностей низкоэнергетического спектра одночастичных состояний и, в частности, от граничных условий. В мезоскопических ловушках с числом атомов, типичным для современных экспериментов с бозе-системами, указанный эффект можно наблюдать экспериментально, например, измеряя изменение максимума теплоемкости, его смещение и деформацию формы λ -особенности.

5. Большой канонический ансамбль обнаруживает в критической области фазового перехода автомоделное поведение статистических и термодинамических характеристик системы в рамках того же масштабирования, что и канонический ансамбль. Автомоделные статистические распределения, отвечающие различным ансамблям, существенно отличаются друг от друга в критической области. Это приводит к значительным различиям критических функций для термодинамических величин в центральной части критической области. Вместе с тем их асимптотики вдали от критической точки совпадают, если вклад конденсированной фракции в эти величины несущественен.

Достоверность полученных результатов

Проведенные исследования основаны на хорошо зарекомендовавших себя методах статистической радиофизики, теории вероятностей и ма-

тематической физики. Достоверность сделанных в диссертации выводов подтверждается их согласием с известными ранее результатами исследования частных задач о бозе-эйнштейновской конденсации, полученных аналитическими и численными методами, а также на основе экспериментальных данных. Разработанные в диссертации методы и найденные точные решения актуальных задач физики фазовых переходов прошли рецензирование и опубликованы в ведущих научных журналах.

Публикации и апробация результатов

Результаты исследований по теме диссертации опубликованы в работах [A1–A13], которые включают 6 статей в рецензируемых отечественных и зарубежных журналах (рекомендованных ВАК для публикации основных результатов) и работы, опубликованные в сборниках трудов всероссийских и международных конференций, а также отражены в тезисах докладов на указанных ниже научных конференциях.

Основные результаты диссертационной работы обсуждались на научных семинарах ИПФ РАН и докладывались на научных школах Нелинейные волны (г. Нижний Новгород, 1–6 марта 2012 г.; 27 февраля–4 марта 2016 г.); XVII научной конференции по радиофизике (г. Нижний Новгород, 13–17 мая 2013 г.); 18-й Нижегородской сессии молодых ученых (г. Нижний Новгород, 28–31 мая 2013 г.); 5-й Международной конференции „Рубежи нелинейной физики“ (Россия, 28 июня–2 августа 2013 г.); Международной конференции по статистической физике „СигмаФи2014“ (г. Родос, Греция, 7–11 июля 2014 г.); 4-й международной молодежной научной школе-конференции «Современные проблемы физики и технологий» (г. Москва, 17–22 марта 2015 г.); Всероссийской конференции «Молодые ученые России» (г. Москва, фонд „Династия“, 12–15 апреля 2015 г.).

Ряд полученных результатов был включен в число основных результатов научной работы Института прикладной физики РАН в 2015 г., а также вошел в отчеты по грантам Российского Фонда Фундаментальных Исследований (12-02-00855-а) и Президента Российской Федерации для поддержки молодых российских учёных и ведущих научных школ Российской Федерации (НШ-1041.2014.2).

Личный вклад автора

Автор принимал активное участие в определении направлений исследований по теме диссертации, включая постановку задач и поиск путей их решения. При выполнении диссертационной работы вклад автора был определяющим как в разработку и реализацию аналитических методов решения конкретных задач, так и в проведение численного моделирования исследованных критических явлений. Силами автора выполнена также значительная часть работы по подготовке результатов к публикации.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, приложения, списка цитированной литературы из 117 наименований, включая 13 публикаций автора. Общий объем диссертации составляет 156 страниц, включая 14 рисунков.

Краткое содержание работы

Во **Введении** изложена общая характеристика работы, обоснована ее актуальность, сформулированы цель и основные задачи, описаны методы исследования, указаны научная новизна и практическая значимость полученных результатов, даны выносимые на защиту научные положения, а также кратко изложены структура и содержание диссертации.

В работе рассматривается равновесная бозе-система при температуре T (измеренной в энергетических единицах), состоящая из N невзаимодействующих атомов, удерживающихся в потенциале произвольного профиля. Этот профиль определяет для атомов одночастичные состояния (нумеруемые индексом $q \geq 0$) и соответствующие дискретные одночастичные энергетические уровни ε_q . Отсчитывая их от основного уровня, т.е. полагая $\varepsilon_0 = 0$, удобно характеризовать данный спектр энергий последовательностью безразмерных чисел $\{\lambda_q\} : \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ (повтор элементов в ней соответствует вырождению уровня), такой, что

$$\frac{\varepsilon_q}{T} = \alpha \lambda_q, \quad \alpha = \text{const} \times \frac{\varepsilon_1}{T}, \quad \lambda_0 \equiv 0. \quad (1)$$

Параметр α включает размерные характеристики системы, причем для определенности можно положить $\alpha = \frac{\varepsilon_1}{T}$. Пределу больших и населенных ловушек отвечают значения $\alpha \ll 1$, при которых ниже уровня температуры расположено много энергетических уровней.

Во **Введении** мотивируется необходимость развиваемой в диссертации аналитической теории автомодельных критических функций, которая дает полное описание критических явлений и, в частности, решает проблему термодинамического предела для идеального газа. С ростом размеров системы критические функции от автомодельного аргумента выходят на неизменные универсальные кривые, определяемые лишь геометрией ловушки через спектр одночастичных состояний $\{\lambda_q\}$. Характерная ширина области фазового перехода в автомодельном масштабе не зависит от размера системы, однако на шкале температур выглядит сужающейся с увеличением системы, что и делает фазовый переход по температуре все более резким. Вместе с тем, автомодельное поведение всех физических величин в центре критической области остается неизменным и плавным,

что и объясняет парадокс неаналитичности термодинамического предела. Сказанное верно и для канонического [A1, A3], и для большого канонического ансамблей [A4, A6].

Вычисление предельных, автомодельных распределений и простой анализ автомодельной переменной и масштабных факторов в выражениях для термодинамических величин позволяет качественно и количественно описать мезоскопическую систему в наиболее сложной, центральной части критической области, избежав трудоемких и малоинформативных численных расчетов для многочисленных вариантов конкретных параметров и размеров системы. Указанное самоподобие проявляется в мезоскопических системах, начиная с умеренных значений полного числа частиц $N \sim 1000$. Для совсем малых систем или слишком далеко от критической точки статистика и термодинамика БЭК не сводятся к предельным автомодельным функциям, а описание требует учета мезоскопических поправок следующего порядка по малому параметру, равному отношению разности энергий двух наинизших одночастичных состояний к температуре. Такой систематический подход, использующий найденное в [39] точное решение для модели трехуровневой ловушки как универсальный инструмент учета поправок, предложен в [A1, A2].

Сопоставление полученных точных результатов с упомянутым ренормгрупповым анализом БЭК в конечных системах обсуждается в [A5].

Первая глава посвящена анализу точного решения для идеального бозе-газа в мезоскопической ловушке в рамках канонического ансамбля с учетом неаналитичности статистического распределения числа частиц в конденсате, обусловленной фиксацией количества частиц в системе [A1].

В разделе **1.1** описан строгий метод, позволяющий на основе распределения Гиббса найти статистику числа надконденсатных частиц n и числа частиц в конденсате $n_0 = N - n$, а также вычислить статистическую сумму $Z^{(N)}$ для описываемой системы. Этот метод реализуется в два этапа. Сначала рассматривается легко решаемая вспомогательная задача о статистической сумме $Z^{(\infty)}$ и распределении $\rho_n^{(\infty)}$ полного числа частиц n на всех возбужденных уровнях для большого канонического ансамбля с равным нулю химическим потенциалом. Затем переход к точному описанию системы с фиксированным числом частиц осуществляется с помощью так называемой „обрезающей связи“ [39]:

$$\begin{aligned} \rho_n &= \frac{\rho_n^{(\infty)} \theta(N - n)}{P(N)}, & P(N) &= \sum_{n=0}^N \rho_n^{(\infty)}, \\ Z^{(N)} &= Z^{(\infty)} P(N), & Z^{(\infty)} &= \prod_{q>0} \frac{1}{1 - e^{-\alpha \lambda_q}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\theta(N - n)$ — ступенчатая функция, равная 0 при $n > N$ и 1 при $n \leq N$. (Подобный вариант учета неаналитичности распределения рассматривался также в [34, 35].)

Во вспомогательной задаче числа заполнения различных уровней независимы и неограниченны. Это позволяет явно найти вспомогательное „необрезанное“ распределение $\rho_n^{(\infty)}$, имеющее математическое ожидание N_c (называемое также критическим числом частиц) и дисперсию σ^2 , с помощью преобразования Фурье от характеристической функции флуктуирующего числа надконденсатных частиц $\Theta^{(n)}(u)$:

$$\rho_n^{(\infty)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iun} \Theta^{(n)}(u) du, \quad \Theta^{(n)}(u) = \prod_{q>0} \frac{e^{\alpha\lambda_q} - 1}{e^{\alpha\lambda_q} - e^{iu}}. \quad (3)$$

Иллюстрация решения (2) приведена на рис. 1. Фазовое состояние мезоскопической системы определяют совместно полное число частиц N и параметры N_c и σ „необрезанного“ распределения $\rho_n^{(\infty)}$. Критической области бозе-эйнштейновской конденсации соответствуют такие параметры системы, для которых выполняется неравенство $|N - N_c| \lesssim \sigma$.

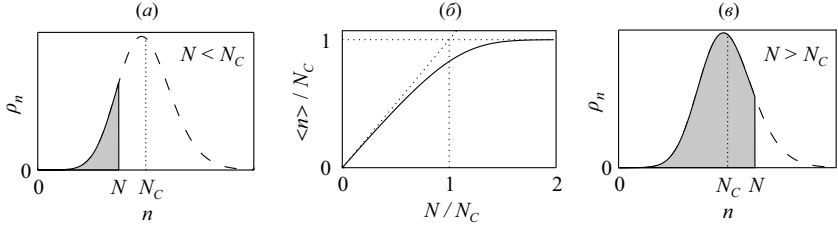


Рис. 1. Иллюстрация решения (2), использующего „обрезающую связь“: пунктир — „необрезанное“ распределение $\rho_n^{(\infty)}$ с математическим ожиданием N_c и дисперсией σ^2 , сплошная линия — распределение числа надконденсатных частиц ρ_n в мезоскопической системе, удерживающей ровно N атомов. Для наглядности распределения не нормированы. Случай (а) $N < N_c$ отвечает неконденсированной фазе, случай (в) $N > N_c$ — наличию бозе-конденсата. Поведение ожидаемого полного числа надконденсатных частиц $\langle n \rangle$ дано на графике (б).

В разделе 1.2 с привлечением методов спектральной теории проводится кумулянтный анализ и исследование характеристической функции $\Theta^{(n)}(u)$, с помощью которой решается вспомогательная задача, определяющая статистические свойства исходной конечной системы.

При этом вводятся так называемые *функции ловушки* $S(t)$ и $S(t, u)$ — спектральные дзета-функции, ассоциированные с безразмерным одноча-

стичным энергетическим спектром ($\Gamma(t)$ обозначает гамма-функцию):

$$S(t) = \Gamma(t) \sum_{q>0} \frac{1}{\lambda_q^t}, \quad S(t, u) = \Gamma(t) \sum_{q>0} \frac{1}{(\lambda_q - iu)^t}. \quad (4)$$

Важную роль в последующем анализе играет положение самого правого полюса $t = r$ этих функций и вычет R в нем. Положение данного полюса характеризует скорость роста спектральной плотности состояний $g(E)$, связанную с законом нарастания одночастичных собственных энергий системы. Именно, если для энергетических уровней ниже или порядка температуры эта спектральная плотность имеет степенную аппроксимацию, то ее показатель отличается от величины r на единицу: $g(E) \sim E^{r-1}$.

Использование преобразования Меллина и введенных спектральных функций приводит к следующему оригинальному представлению логарифма характеристической функции и ее кумулянтов $\kappa_m^{(n)(\infty)}$ [A1]:

$$\begin{aligned} \ln \Theta^{(n)}(u) &= \sum_j \operatorname{Res}_{t=t_j} \alpha^{-t} \zeta(t+1) \left(S\left(t, \frac{u}{\alpha}\right) - S(t) \right), \\ \kappa_m^{(n)(\infty)} &\equiv \left. \frac{\partial \ln \Theta^{(n)}(u)}{\partial (iu)^m} \right|_{u=0} = \sum_j \operatorname{Res}_{t=t_j} \alpha^{-t} \zeta(t+1-m) S(t), \end{aligned} \quad (5)$$

где суммирование ведется по всем полюсам, а $\zeta(t)$ обозначает дзета-функцию Римана с полюсом в точке $t = 1$. Для больших систем, когда $\alpha \ll 1$, наибольший вклад в выражения (5) дает самый правый полюс.

Представление (5) для логарифма характеристической функции $\Theta^{(n)}(u)$, аналитичное при $u = 0$, [A1] является ключевым для проведенного в диссертации детального исследования БЭК в критической области.

Вторая глава посвящена особенностям статистике числа надконденсатных частиц n в области $|n - N_c| \ll N_c$, ответственной за поведение системы в окрестности критической точки, где $|N - N_c| \lesssim \sigma$.

Переход к естественным переменным $x = (n - N_c)/\sigma$ (масштабированное число частиц вне конденсата) и $\eta = (N - N_c)/\sigma$ (масштабированное полное число частиц) обнаруживает *автомоделность* статистики в критической области [A1]. С увеличением размера системы и числа частиц в ней (т.е. с уменьшением величины α и увеличением числа энергетических уровней, лежащих ниже уровня температуры) масштабированные распределения ρ_n и ρ_{n_0} быстро сходятся к имеющим аргументы x и η функциям, зависящим лишь от безразмерного спектра $\{\lambda_q\}$ (т.е. от формы ловушки), но не от конкретных размерных физических параметров системы. Эта сходимостъ продемонстрирована на рис. 2.

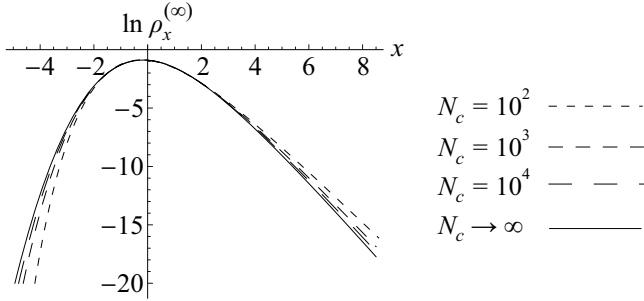


Рис. 2. „Необрезанное“ распределение $\rho_x^{(\infty)}$ случайной величины x — масштабированного полного число частиц вне конденсата — для трехмерной изотропной ловушки-ящика с периодическими граничными условиями. Пунктирные кривые, соответствующие разным размерам системы ($N_c = 10^2$ для коротких, $N_c = 10^3$ для средних и $N_c = 10^4$ для длинных интервалов) стремятся с увеличением N_c к предельному распределению (сплошная линия).

В разделе **2.1** свойство автомодельности обосновывается с использованием аппарата статистической радиофизики, а именно анализа характеристической функции и кумулянтов вспомогательного „необрезанного“ распределения, определяющего статистику чисел n и n_0 согласно решению (2). Принципиален тот факт, что скейлинг кумулянтов (5) $\kappa_m^{(n)(\infty)}$, характеризующих решение (2), в пределе больших систем $\alpha \rightarrow 0$ может оказаться разным в зависимости от геометрических свойств ловушки, задающих положение самого правого полюса r функции (4) $S(t)$:

$$m < r : \kappa_m^{(n)(\infty)} = R\zeta(r+1-m)\alpha^{-r}, \quad m > r : \kappa_m^{(n)(\infty)} = S(m)\alpha^{-m}. \quad (6)$$

Характеристическая функция масштабированного „необрезанного“ распределения $\rho_x^{(\infty)}$ случайной величины x вычисляется преобразованием вида $\Theta^{(x)}(u) = \Theta^{(n)}(u/\sigma) \exp(-iuN_c/\sigma)$; в результате для кумулянтов величины x получается: $\kappa_1^{(x)(\infty)} = 0$, $\kappa_2^{(x)(\infty)} = 1$, $\kappa_{m \geq 2}^{(x)(\infty)} = \kappa_{m \geq 2}^{(n)(\infty)} / \sigma^m$.

В зависимости от положения самого правого полюса r функции ловушки $S(t)$ значение дисперсии $\sigma^2 \equiv \kappa_2^{(n)(\infty)}$ дается одним из двух выражений (6), что порождает деление всех ловушек на два класса. При этом оказывается, что в обоих случаях предельная характеристическая функция $\Theta^{(x)}$, а значит, и распределение $\rho_x^{(\infty)}$ не зависят от конкретной величины характеризующего размер системы параметра α , если $\alpha \ll 1$, что и означает автомодельность поведения в критической области.

Ловушки, для которых $r > 2$ (то есть ряд $\sum_{q>0} \lambda_q^{-2}$ расходится), образуют *гауссов класс*. Для него характерна предельная универсальная

статистика со стандартной величиной дисперсии, $\sigma \sim \sqrt{N_c}$, и нулевыми старшими кумулянтами:

$$\ln \Theta^{(x)}(u) = -\frac{u^2}{2}, \quad \rho_x^{(\infty)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (7)$$

Ловушки, для которых $r < 2$ (то есть ряд $\sum_{q>0} \lambda_q^{-2}$ сходится), образуют так называемый *аномальный класс*. Он характеризуется аномально большой дисперсией, $\sigma \sim N_c^{1/r}$, а также ненулевыми старшими кумулянтами распределения $\kappa_{m \geq 3}^{(x)(\infty)} = S(m)/S^{\frac{m}{2}}(2)$, что соответствует негауссовой автомодельной предельной статистике, зависящей от конкретного спектра одночастичных энергетических уровней $\{\lambda_q\}$ [A1, A3]:

$$\Theta^{(x)}(u) = S \left[0, \frac{u}{\sqrt{S(2)}} \right] - S(0) - \frac{i u S(1)}{\sqrt{S(2)}}, \quad \rho_x^{(\infty)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i u x} \Theta^{(x)}(u) du. \quad (8)$$

Разделение ловушек на классы универсальности связано с применимостью либо неприменимостью центральной предельной теоремы при расчете статистики. Для ловушек аномального класса непосредственной причиной отклонения от гауссового распределения является то, что статистику определяет лишь малое число заселенных, низколежащих уровней. Напротив, для ловушек гауссова класса флуктуации определяются большим числом высоколежащих уровней с энергиями вплоть до температуры, что, как показано в диссертации, неизбежно, если спектральная плотность состояний растет с энергией быстрее, чем линейно.

В разделе **2.2** для систем аномального класса (где самый правый полюс $S(t)$ лежит в точке $r < 2$) анализируются асимптотики их распределений, иллюстрирующие отличия от гауссовой кривой.

В области $x \gg 1$ поведение распределения $\rho_x^{(\infty)}$ в большой степени определено самым нижним из возбужденных уровней λ_1 с кратностью вырождения g_1 ; асимптотика имеет вид $\rho_x^{(\infty)} \sim \wp_{g_1}(x) e^{-\sqrt{S(2)}\lambda_1 x}$, где предэкспоненциальный фактор \wp_{g_1} — полиномом x степени $g_1 - 1$. Чем ближе указанный полюс r находится к границе аномального класса $r = 2$, тем большие аргументы $x > 0$ отвечают выходу $\rho_x^{(\infty)}$ на асимптотику.

В области $-x \gg 1$ асимптотика распределения вычисляется с помощью метода стационарной фазы, примененного к интегралу в восстанавливающем $\rho_x^{(\infty)}$ преобразовании Фурье (8), и предсказывает закон спадаения со старшим членом вида $\rho_x \sim e^{-|x|^{r/(r-1)}}$. Он отличается от гауссова закона тем сильнее, чем левее расположен самый правый полюс функции ловушки r относительно пограничной между классами точки $r = 2$, т.е. чем медленнее растет плотность состояний с ростом энергии.

Для бозе-газа в ловушках обоих классов свойство автомодельности статистики и особенности асимптотик естественным образом наследуются распределениями исходной задачи: $\rho_x = \frac{\rho_x^{(\infty)\theta(\eta-x)}}{P(\eta)}$, $P(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} \rho_x^{(\infty)} dx$.

Отметим, что разделение ловушек на классы универсальности было независимо обнаружено совершенно другим методом в [46], где бозе-газ рассматривался лишь в фазе развитого конденсата. Факт наличия бозе-систем с предельной негауссовой статистикой отмечался также в [35].

В **третьей** главе изучается поведение термодинамических величин мезоскопической системы в окрестности критической точки. Оно оказывается напрямую связанным с изученным во второй главе распределением $\rho_x^{(\infty)}$ и раскрывает свой автомодельный вид при переходе к аргументу η — масштабированному полному числу частиц в системе [A2].

В разделе **3.1** рассмотрено поведение *параметра порядка* системы в критической области, наиболее интересной для анализа фазовых переходов в физике конденсированного состояния. Он выбирается пропорциональным ожидаемому числу частиц на основном уровне $\langle n_0 \rangle$ и описывается в теории Ландау неаналитичной аппроксимацией $\langle n_0 \rangle = \max(N - N_c(T), 0)$, имеющей разрыв производной в точке $T = T_c$, $N = N_c$.

Явное вычисление статистических распределений n и n_0 с помощью „обрезающей связи“ (2) позволяет описать плавную температурную зависимость величины $\langle n_0 \rangle$ в окрестности критической точки, связывая параметр порядка с моментными характеристиками распределений.

В пределе больших систем $\alpha \rightarrow 0$ поведение параметра порядка (выраженного через масштабированную величину $x_0 = n_0/\sigma$) стремится к автомодельной зависимости от аргумента η :

$$\langle x_0 \rangle = \eta - \langle x \rangle, \quad \langle x \rangle = \frac{1}{P(\eta)} \int_{-\infty}^{\eta} x \rho_x^{(\infty)} dx. \quad (9)$$

Аналогично описывается и автомодельность флуктуаций параметра порядка, сопоставимых в критической области с его средним значением.

В разделе **3.2** изучаются свободная энергия системы F и средняя энергия системы E . Как следует из выражения, определяющего статистическую сумму $Z^{(N)}$ в решении (2), подобные величины, вычисляемые через логарифм статистической суммы напрямую или дифференцированием, естественным образом разбиваются на два разномасштабных слагаемых

$$F = F^{(\infty)} - T \ln P(N), \quad E = E^{(\infty)} + T^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln P(N), \quad (10)$$

сумма которых описывает непрерывную эволюцию той или иной термодинамической величины при изменении фазового состояния системы.

Первое из этих слагаемых (такое, как $F^{(\infty)}$ или $E^{(\infty)}$) порождено статистической суммой „необрезанной“ задачи $Z^{(\infty)}$, имеет порядок величины N_c и ведет себя в окрестности критической точки как очень плавная функция параметров системы. Второе слагаемое, связанное с интегральным распределением $P(N)$, ответственно за фазовый переход — оно является намного более быстрым и существенно изменяет свою величину при прохождении через критическую область. Его порядок величины для свободной и средней энергии много меньше, чем порядок величины первого слагаемого. Однако второе слагаемое тем больше, чем больший порядок дифференцирования статистической суммы порождает термодинамическую характеристику: с учетом близкой к автомодельной структуре распределения $P(N)$ установлено, что каждое применение оператора $T \frac{\partial}{\partial T}$ привносит дополнительный множитель порядка $N_c/\sigma \gg 1$.

С ростом размеров системы распределение $\rho_x^{(\infty)}$ и соответствующее масштабированное интегральное распределение $P(\eta)$ стремятся к универсальной кривой, что позволяет ввести для термодинамических величин характеризующие их поведение автомодельные *критические функции*:

$$\Delta F \equiv \frac{F - F^{(\infty)}}{T} \rightarrow -\ln P(\eta); \quad \Delta E \equiv \frac{\sigma}{rN_c} \frac{E - E^{(\infty)}}{T} \rightarrow -\frac{\partial \ln P(\eta)}{\partial \eta}. \quad (11)$$

Эти функции остаются плавными и гладкими в окрестности критической точки для системы произвольно большого размера.

В разделе **3.3** рассматривается широко известная *λ -особенность теплоемкости*, для которой впервые удалось дать непрерывное описание во всей критической области для произвольной ловушки:

$$C_V \simeq C_V^{(\infty)} + \left(\frac{rN_c}{\sigma}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \ln P(\eta), \quad C_V^{(\infty)} = \sum_{q>0} \frac{\alpha^2 \lambda_q^2 e^{\alpha \lambda_q}}{(e^{\alpha \lambda_q} - 1)^2}. \quad (12)$$

Конкуренция мезоскопического и „необрезанного“ слагаемых может иметь два различных исхода в зависимости от положения самого правого полюса r функции ловушки $S(t)$, связанного со спектральной плотностью состояний в системе. В результате реализуются две качественно разные картины λ -особенности, которые наглядно иллюстрируются найденными в диссертации критическими функциями (см. рис. 3):

$$\Delta C_V \equiv \frac{\sigma^2}{r^2 N_c^2} \left(C_V - C_V^{(\infty)}\right) \rightarrow \Delta C_V^{(lim)} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \ln P(\eta). \quad (13)$$

Для ловушек гауссова класса, где $r > 2$ и $\sigma \sim \sqrt{N_c}$, оба слагаемых в выражении для теплоемкости (12) оказываются одного порядка, и

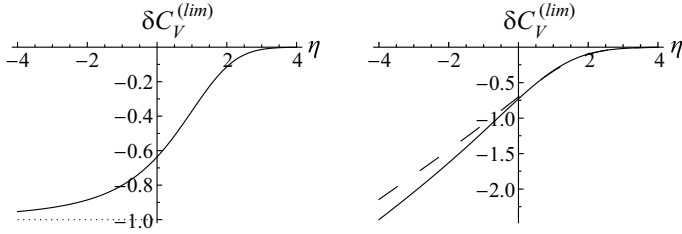


Рис. 3. Предельные универсальные кривые для критической функции $\Delta C_V^{(lim)}$, которая определена формулой (13) и описывает автомодельную структуру удельной теплоемкости для всех ловушек гауссова класса (слева) и двух примеров ловушек аномального класса — трехмерных кубических ящиков с периодическими или нулевыми граничными условиями (справа, пунктирная и сплошная линии соответственно).

соответствующая гауссову „необрезанному“ распределению критическая функция описывает быстрое изменение удельной теплоемкости $\frac{C_V}{N}$ на конечную величину $\frac{r^2 N_c}{\sigma^2}$ в окрестности критической точки. К таким ловушкам относятся, например, трехмерные гармонические потенциалы.

Для ловушек аномального класса, где $r < 2$ и $\sigma \sim N_c^{1/r}$, мезоскопическое слагаемое отвечает за быстрое изменение не самой величины удельной теплоемкости $\frac{C_V}{N}$, а ее производной по температуре. К таким ловушкам относятся, например, трехмерные ловушки-ящики.

Четвертая глава сфокусирована на особенностях поведения удельной теплоемкости для мезоскопических ловушек аномального класса в критической области параметров, в частности, на зависимости формы и положения λ -особенности теплоемкости от негрубых изменений энергетического спектра, таких как изменение граничных условий [A2].

В разделе 4.1 рассмотрен модельный пример ловушек в форме кубических ящиков ($r = 3/2$), накладывающих на волновую функцию частиц периодические либо нулевые граничные условия. Спектры рассматриваемых кубических ловушек, для которых индексы (p) и (z) обозначают соответственно периодические и нулевые граничные условия, имеют вид:

$$\alpha = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2T}; \quad \frac{\varepsilon^{(p)}}{T} = \alpha \lambda^{(p)}, \quad \lambda^{(p)} = 4 \times (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2), \quad q_i = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

$$\frac{\varepsilon^{(z)}}{T} = \alpha \lambda^{(z)}, \quad \lambda^{(z)} = (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 - 3), \quad q_i = +1, +2 \dots$$
(14)

(m — масса бозе-атома, L — длина стороны ящика). Изменение граничных

условий с периодических на нулевые исключает из системы целые пласты состояний с $q_i = 0$, что заметно сказывается на поведении теплоемкости в окрестности критической точки двумя путями. Во-первых, изменяется зависимость автомодельного аргумента η от температуры T . Во-вторых, меняется форма „необрезанного“ распределения $\rho_x^{(\infty)}$, а вместе с ней — и сама критическая функция, характеризующая теплоемкость. Действие обоих этих факторов отобразено на рис. 4.

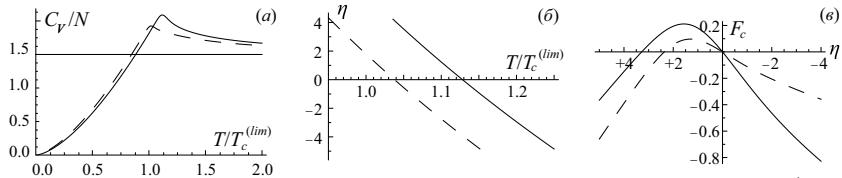


Рис. 4. Зависимость λ -структуры удельной теплоемкости газа из 10^4 бозе-атомов в трехмерной ловушке-ящике от наложенных на волновую функцию периодических (пунктирные кривые) или нулевых (сплошные кривые) граничных условий: (а) удельная теплоемкость как функция температуры, (б) автомодельная переменная $\eta = (N - N_c)/\sigma$ как функция температуры, (в) универсальная критическая функция $F_c = \frac{\sigma^2}{r^2 N_c} \left(\frac{C_V(T)}{N} - \frac{C_V(T_c)}{N_c} \right)$, характеризующая удельную теплоемкость.

В следующих двух разделах приведены примеры конфигураций ловушек, которые могут позволить *экспериментально реализовать изменение граничных условий* или возмущения спектра, достаточные для обнаружения соответствующего изменения термодинамической величины, например теплоемкости. Возможность изменения граничных условий связана с созданием квазивертикальной потенциальной стенки или тонкого плоского слоя, частично или полностью непроницаемых, за счет использования лазерного излучения с „ножевой“ диаграммой направленности и регулируемой интенсивностью, как это продемонстрировано в недавнем эксперименте с бозе-атомами [14].

Раздел 4.2 посвящен цилиндрически-симметричным кольцевым ловушкам, которые естественным образом накладывают азимутальные периодические граничные условия на волновую функцию удерживаемых частиц. Рассекая такую ловушку непроницаемой стенкой вдоль одного из радиусов, азимутальные граничные условия можно заменить нулевыми.

Присущая кольцевой ловушке анизотропия спектра одночастичных состояний — собственные числа при увеличении радиального квантового числа растут намного быстрее, чем при увеличении азимутального — не позволяет получить заметного влияния граничных условий на термодинамику в трехмерной задаче. Однако, различного эффекта удается

добиться в квазидвумерной конфигурации

$$U(r, \varphi, y) = \begin{cases} \frac{U_0}{\hbar^2} y^2 & \text{в кольце } 0 < \varphi < 2\pi, r_{in} < r < r_{out}; \\ +\infty & \text{вне указанного кольца,} \end{cases} \quad (15)$$

где $r_{in} \simeq r_{out}$ и заселены только состояния с минимальным радиальным квантовым числом. Поскольку самым правым полюсом функции ловушки $S(t)$ является $r = 3/2$, то структура λ -особенности и ее зависимость от граничных условий качественно повторяют таковые для трехмерной ловушки-ящика, показанные на рис. 4.

В разделе 4.3 изучены допускающие декартово разделение переменных трехмерные ловушки-параллелепипеды с непроницаемыми стенками, которые рассечены параллельно одной паре граней проницаемой лазерной плоскостью с регулируемой интенсивностью. Потенциал такой ловушки может быть приблизительно записан как

$$U(x, y, z) = \begin{cases} \frac{\hbar B}{mL_x} \delta(x - \frac{L_x}{2}) & \text{при } 0 < x < L_x, 0 < y < L_y, 0 < z < L_z; \\ +\infty & \text{вне указанного параллелепипеда.} \end{cases} \quad (16)$$

Параметр B связан с интенсивностью поля секущей лазерной плоскости. Если величина B превысит значение 1, то низшее собственное значение в одномерной задаче по оси x исчезает, а остальные лишь несколько сдвигаются. Такая манипуляция запрещает в трехмерной ловушке целый пласт состояний, то есть эквивалентна замене периодических граничных условий на нулевые на одной паре граней трехмерной ловушки-ящика.

В приведенных примерах показано, что эффект влияния граничных условий на термодинамические свойства системы, упускаемый в неразрешающих критическую область подходах типа термодинамического предела, вполне заметен для систем с типичными параметрами и размерами, реализуемыми в экспериментах. Для описанных типов ловушек с характерными числами атомов $N = 10^3 - 10^5$ величина этого эффекта, выражаемая сдвигом положения максимума теплоемкости и изменением его величины, может достигать нескольких (вплоть до 10) процентов.

Последняя, **пятая** глава посвящена сравнению предсказаний и доказательству неэквивалентности канонического и большого канонического ансамбля в критической области параметров.

Для подробного анализа удобно по аналогии с безразмерным спектром $\{\lambda_q\}$ ввести и безразмерный химический потенциал $\tilde{\mu}$, так что $\frac{\mu}{T} = \alpha \tilde{\mu}$. Химический потенциал определен уравнением $\sum_{q \geq 0} (e^{\alpha(\lambda_q - \tilde{\mu})} - 1)^{-1} = N$, выражающим то условие, что ожидаемое полное число частиц в системе равно заданному числу атомов в ловушке N .

В разделе **5.1** описание системы в рамках большого канонического ансамбля (сокращенно — бка) выполнено методами статистической радиопизики, аналогичными использованным в разделах 1.2 и 2.1 и работающими во всей критической области. Для распределения числа частиц вне конденсата находится новое представление характеристической функции

$$\ln \Theta^{(n)(\text{бка})}(u) = \sum_j \operatorname{Res}_{t=t_j} \alpha^{-t} \zeta(t+1) \left(S\left(t, \frac{u}{\alpha} - i\tilde{\mu}\right) - S(t, -i\tilde{\mu}) \right), \quad (17)$$

близкое к полученному для „необрезанного“ распределения в разделе 2.1 и отличающееся лишь наличием безразмерного химического потенциала $\tilde{\mu}$ в аргументах функции ловушки $S\left(t, \frac{u}{\alpha} - i\tilde{\mu}\right) \equiv \Gamma(t) \sum_{q>0} (\lambda_q - \tilde{\mu} - i\frac{u}{\alpha})^{-t}$.

В разделе **5.2** уравнение для химического потенциала решается относительно переменной $\eta = (N - N_c)/\sigma$, разрешающей критическую область для систем произвольно большого размера. В широкой области параметров системы, содержащей всю критическую область, решение оказывается автомодельным — с ростом размера системы произведение трех величин $F_\mu = \alpha\sigma\tilde{\mu}$ сходится к универсальной функции аргумента η . Конкретный вид этой функции зависит от геометрических свойств ловушки и вновь делит их на два класса, совпадающих с ранее указанными гауссовым и аномальным. Показано, что химический потенциал $\tilde{\mu}$ во всей критической области для ловушек обоих классов имеет порядок величины, не превышающий α^0 . Это означает полную аналогию свойств спектральных функций $S(t, u)$ и $S(t, u - i\tilde{\mu})$, что позволяет в рамках большого канонического ансамбля, как и в разделе 2.1, обнаружить автомодельность распределения числа частиц вне конденсата $\rho_x^{(\text{бка})}$, где $x = (n - N_c)/\sigma$.

Раздел **5.3** содержит сравнение автомодельных статистических распределений для чисел частиц в конденсате и в надконденсате, предсказанных разными ансамблями, и демонстрирует (см. рис. 5), что большой канонический ансамбль не способен корректно и полно воссоздать статистику системы с заданным числом частиц ни в какой фазе.

Статистика числа частиц вне конденсата ρ_x для случая фиксированного числа частиц характеризуется явной неаналитичностью, которую вводит „обрезающая связь“ (2); большой канонический ансамбль же предсказывает плавные непрерывные зависимости. Различия предсказаний уменьшаются лишь в фазе развитого конденсата, где $\eta \gg 1$ и „обрезка“ не играет особой роли, а основной уровень можно рассматривать как резервуар частиц. Для статистики числа частиц в конденсате большой канонический ансамбль, независимо от фазового состояния системы, предсказывает экспоненциальное распределение. В конденсированной фазе этот результат заведомо неверен, так как среднеквадратичное отклонение числа

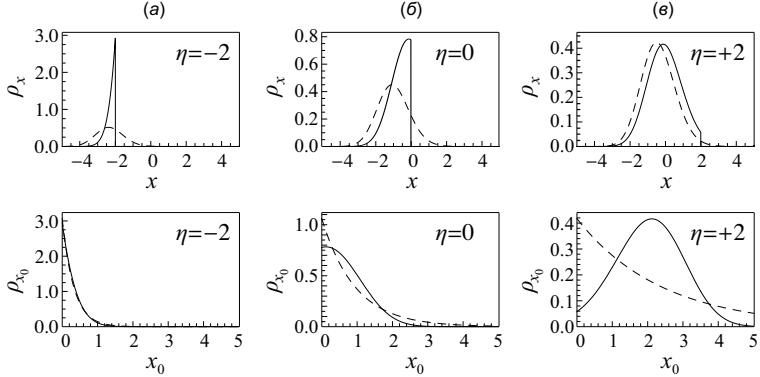


Рис. 5. Отличия автоматических распределений масштабированного числа частиц в конденсате $x_0 = n_0/\sigma$ (нижние графики) и масштабированного полного числа частиц вне конденсата $x = (n - N_c)/\sigma$ (верхние графики), определенных большим каноническим (пунктир) и каноническим (сплошная линия) ансамблями для кубической ловушки с непроницаемыми стенками: (а) классическая фаза, $\eta = -2$, (б) критическая точка, $\eta = 0$, (в) конденсированная фаза, $\eta = 2$.

частиц в конденсате оказывается порядка ожидаемого значения, а наиболее вероятно состояние с незанятым основным уровнем. Соответствующее каноническое распределение имеет много меньшую дисперсию и выраженный максимум при конечной населенности конденсата. Причиной расхождения является тот факт, что *большой канонический ансамбль не учитывает жесткой корреляции числа частиц в конденсате и вне его*, возникающей в системе с фиксированным числом атомов.

В разделе 5.4 аналогичное сравнение проведено для термодинамических характеристик (и их критических функций), а именно, средней энергии и теплоемкости. Установлено, что оба ансамбля приводят к одинаковому скейлингу для характеристик системы. Однако прямое сопоставление одинаково определенных критических функций (11) и (13), явно вычисленных для обоих ансамблей (сокращенно — бка и ка) при $\alpha \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned}
 F_E^{(\text{бка})}(\eta) &= F_\mu(\eta), & \Delta C_V^{(\text{lim})(\text{бка})}(\eta) &= -\frac{\partial}{\partial \eta} F_\mu(\eta), \\
 F_E^{(\text{ка})}(\eta) &= -\frac{\partial}{\partial \eta} \ln P(\eta), & \Delta C_V^{(\text{lim})(\text{ка})}(\eta) &= \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \ln P(\eta).
 \end{aligned} \tag{18}$$

показывает [A4], что в центральной части критической области следует ожидать заметных различий в предсказаниях, но только для таких величин, которые испытывают в ней существенное изменение (например,

для теплоемкости). Вдали от критической точки асимптотики критических функций, а значит, и полученные в разных ансамблях предсказания для рассматриваемых термодинамических величин сходятся друг к другу.

В разделе 5.5 на основе обоих построенных описаний выясняется причина такого совпадения асимптотик. При переходе к конденсированной фазе $\eta \gg 1$ оно объясняется тем, что решения, полученные в рамках обоих ансамблей, стремятся к одному и тому же решению вспомогательной „необрезанной“ задачи (другими словами, работает приближение „ансамбля демона Максвелла“ [29]). Для канонического ансамбля асимптотика $Z^{(N)} \simeq Z^{(\infty)}$ следует, согласно (2), из асимптотики $P(\eta \gg 1) \simeq 1$. Для большого канонического ансамбля соотношение $Z^{(\text{бкк})} \simeq Z^{(\infty)}$ верно по определению вспомогательной „необрезанной“ системы с учетом малости величины химического потенциала ($\tilde{\mu} \simeq 0$) при $\eta \gg 1$.

Совпадение асимптотик при $-\eta \gg 1$ имеет более сложное объяснение. Именно, с точностью до замены переменных совпадают два уравнения, задающие для большого канонического ансамбля химический потенциал, а для канонического ансамбля — стационарную точку u_{st} в определяющем асимптотику статистической суммы интеграле. При этом имеет место соотношение $iu_{st} \simeq \mu/T$ и асимптотики термодинамических характеристик, выражающихся разнообразными комбинациями величин $e^{(\varepsilon_q - \mu)/T}$ и $e^{(\varepsilon_q/T - iu_{st})}$, оказываются сближающимися.

Близость рассмотренных асимптотик физически отражает тот факт, что вне критической области для обоих ансамблей флуктуации слабо влияют на термодинамические характеристики, которые обусловлены атомами, находящимися на возбужденных уровнях.

В Заключение приведены основные результаты диссертации.

В Приложении А кратко рассмотрены основные свойства и методы исследования так называемых функций ловушек (4) $S(t)$ и $S(t, u)$ (то есть обобщенных спектральных дзета-функций, ассоциированных с безразмерным одночастичным энергетическим спектром атома в удерживающем потенциале), которые неоднократно используются в исследовании и в пределе больших систем определяют автомодельные зависимости статистических и термодинамических характеристик бозе-системы.

Основные результаты

1. В рамках канонического ансамбля дано аналитическое описание критических явлений бозе-эйнштейновской конденсации идеального газа в произвольной мезоскопической ловушке. Оно опирается на нахождение статистики населенности надконденсата в аналогичной задаче для большого канонического ансамбля с нулевым химическим потенциалом, решение которой получено на основе развитой техники спектрального представления характеристической функции этой статистики, порожденного преобразованием Меллина.

2. С использованием автомодельной переменной, являющейся определенной комбинацией температуры, числа частиц, их массы и параметров ловушки, установлен масштаб критической области и показано, что масштабированные распределения числа частиц в конденсате и в надконденсате при увеличении размера системы быстро сходятся к определенным автомодельным распределениям этой переменной. Их вид обусловлен профилем удерживающего потенциала через закон нарастания одночастичных собственных энергий и не зависит от значений каких-либо размерных параметров ловушки. Проведено и обосновано разделение всех ловушек на два класса универсальности с сильно отличающимися статистическими свойствами бозе-газа — гауссов и аномальный классы, характеризующиеся применимостью или неприменимостью центральной предельной теоремы для расчета статистики.

3. Продемонстрирован плавный, непрерывный (без скачков) характер перехода через критическую область для всех термодинамических величин, как связанных с моментами распределения (параметр порядка), так и выражающихся через статистическую сумму — напрямую (свободная энергия) либо посредством однократного или двукратного дифференцирования (средняя энергия и теплоемкость). В пределе большой системы бозе-атомов поведение ее термодинамических величин сведено к найденным критическим функциям единого аргумента — указанной автомодельной переменной. Соответствующие детальные аналитические и численные расчёты выполнены для ряда ловушек гауссова и аномального класса.

4. На примере формы λ -особенности теплоемкости газа невзаимодействующих атомов, удерживающегося в мезоскопической ловушке, выявлено значительное влияние граничных условий на термодинамические свойства бозе-системы. Оно рассчитано для ловушек определенных конфигураций аномального класса, где флуктуации конденсата и вид автомодельных критических функций в существенной мере зависят от низкоэнергетического спектра одночастичных состояний, а следовательно, от граничных условий. Предложены анизотропные ловушки цилиндри-

ческой и декартовой геометрии, в том числе квазидвумерные, в которых указанный эффект может быть обнаружен экспериментально при использовании сравнительно небольшого числа атомов (10^3-10^5), типичного для современных экспериментов с бозе-системами.

5. В рамках большого канонического ансамбля найдены статистические и термодинамические свойства идеального бозе-газа, удерживаемого в произвольной ловушке, и проведено их сравнение с соответствующими свойствами для канонического ансамбля. Доказано, что для различных ансамблей эти свойства имеют одинаковый автомодельный характер, однако существенно отличаются друг от друга в центральной части критической области, где велика роль флуктуаций. Установлены наличие и границы неэквивалентности описания бозе-конденсации в рамках канонического и большого канонического ансамблей.

Список работ по теме диссертации

- [A1] *S. V. Tarasov, Vl. V. Kocharovskiy, V. V. Kocharovskiy.* Universal scaling in the statistics and thermodynamics of a Bose-Einstein condensation of an ideal gas in an arbitrary trap // *Physical Review A.* — 2014. — V. 90, no. 3. — p. 033605.
- [A2] *S. V. Tarasov, Vl. V. Kocharovskiy, V. V. Kocharovskiy.* Universal fine structure of the specific heat at the critical λ -point for an ideal Bose gas in an arbitrary trap // *Journal of Physics A.* — 2014. — V. 47, no. 41. — p. 1–23.
- [A3] *С. В. Тарасов.* Асимптотические методы в теории бозе-эйнштейновской конденсации идеального газа в произвольной мезоскопической ловушке // *Нелинейный мир.* — 2015. — № 6. — с. 34–46.
- [A4] *S. V. Tarasov, Vl. V. Kocharovskiy, V. V. Kocharovskiy.* Grand Canonical Versus Canonical Ensemble: Universal Structure of Statistics and Thermodynamics in a Critical Region of Bose–Einstein Condensation of an Ideal Gas in Arbitrary Trap // *Journal of Statistical Physics.* — 2015. — V. 161, no. 4. — p. 942–964.
- [A5] *Вл. В. Кочаровский, В. В. Кочаровский, С. В. Тарасов.* Бозе-эйнштейновская конденсация в мезоскопических системах: автомодельная структура критической области и неэквивалентность канонического и большого канонического ансамблей // *Письма в ЖЭТФ.* — 2016. — Т. 103, № 1. — с. 67–80.
- [A6] *С. В. Тарасов.* Автомодельность статистики в критической области бозе-конденсации идеального газа в мезоскопических ловушках: канонический и большой канонический ансамбли // *Краткие сообщения по физике.* — 2016. — Т. 43, № 4. — с. 45–51.

- [A7] *C. В. Тарасов, Вл. В. Кочаровский, В. В. Кочаровский.* Точное решение задачи о бозе-эйнштейновской конденсации идеального газа в мезоскопической ловушке с жесткими стенками // XVI научная школа "Нелинейные волны-2012": тезисы докладов. — Нижний Новгород, 2012. — с. 135–136.
- [A8] *C. В. Тарасов, Вл. В. Кочаровский, В. В. Кочаровский.* Универсальная структура критической области бозе-эйнштейновской конденсации идеального газа в мезоскопических системах // Труды XVIII Нижегородской сессии молодых ученых: естественные, математические науки. — Нижний Новгород, 2013. — с. 74–77.
- [A9] *C. В. Тарасов, Вл. В. Кочаровский, В. В. Кочаровский.* Влияние граничных условий на процесс бозе-эйнштейновской конденсации в атомных системах // Труды XVII научной конференции по радиофизике. — Нижний Новгород, 2013. — с. 151–153.
- [A10] *S. V. Tarasov, Vl. V. Kocharovskiy, V. V. Kocharovskiy.* Universality of the λ -point structure for the Bose-Einstein condensation of an ideal gas in different traps // V International Conference "Frontiers of Nonlinear Physics-2013": proceedings. — Nizhny Novgorod, 2013. — p. 276–277.
- [A11] *S. V. Tarasov, Vl. V. Kocharovskiy, V. V. Kocharovskiy.* Universal scaling in the statistics and thermodynamics of the Bose-Einstein condensation of an ideal gas in different mesoscopic traps // International Conference on the Statistical Physics "SigmaPhi2014": abstracts. — Rhodes, 2014. — p. 160.
- [A12] *C. В. Тарасов, Вл. В. Кочаровский, В. В. Кочаровский.* Универсальная аналитическая теория термодинамических свойств идеального бозе-газа в мезоскопических ловушках для всей критической области параметров системы // IV международная молодежная научная школа-конференция "Современные проблемы физики и технологий": тезисы докладов, ч. 1. — М., 2015. — с. 79–80.
- [A13] *C. В. Тарасов, Вл. В. Кочаровский, В. В. Кочаровский.* Неэквивалентность канонического и большого канонического ансамблей на примере статистики и термодинамики бозе-эйнштейновского конденсата в критической области параметров // XVII научная школа "Нелинейные волны-2016": тезисы докладов. — Нижний Новгород, 2016. — с. 143.

Список литературы

- [1] M. Holzmann, W. Krauth. *Transition temperature of the homogeneous, weakly interacting Bose gas* // Physical Review Letters, **83**, 14, p. 2687–2690 (1999).
- [2] E. Burovski, J. Machta, N. Prokof'ev, B. Svistunov. *High-precision measurement of the thermal exponent for the three-dimensional XY universality class* // Physical Review B, **74**, 13, p. 132502 (2006).

- [3] J. Wang, Y. Ma. *Thermodynamics and finite-size scaling of homogeneous weakly interacting Bose gases within an exact canonical statistics* // Physical Review A, **79**, 3, p. 033604 (2009).
- [4] Л. П. Питаевский. *Конденсация Бозе-Эйнштейна в магнитных ловушках. Введение в теорию* // Успехи физических наук, **168**, 6, с. 641–653 (1998).
- [5] J. O. Andersen. *Theory of the weakly interacting Bose gas* // Reviews of Modern Physics, **76**, 2, p. 599–639 (2004).
- [6] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, W. Ketterle. *Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms* // Physical Review Letters, **75**, 22, p. 3969–3973 (1995).
- [7] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, E. A. Cornell. *Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor* // Science, **269**, 5221, p. 198–201 (1995).
- [8] L. P. Pitaevskii, S. Stringari. *Bose-einstein condensation*: Oxford University Press (2003).
- [9] I. Bloch, J. Dalibard, W. Zwerger. *Many-body physics with ultracold gases* // Reviews of Modern Physics, **80**, 3, p. 885–964 (2008).
- [10] S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, W. Ketterle. *Observation of Feshbach resonances in a Bose-Einstein condensate* // Nature, **392**, 6672, p. 151–154 (1998).
- [11] K. Henderson, C. Ryu, C. MacCormick, M. G. Boshier. *Experimental demonstration of painting arbitrary and dynamic potentials for Bose-Einstein condensates* // New Journal of Physics, **11**, 4, p. 043030 (2009).
- [12] A. Görlitz, J. M. Vogels, A. E. Leanhardt, C. Raman, T. L. Gustavson, J. R. Abo-Shaeer, A. P. Chikkatur, S. Gupta, S. Inouye, T. Rosenband, W. Ketterle. *Realization of Bose-Einstein condensates in lower dimensions* // Physical Review Letters, **87**, 13, p. 130402 (2001).
- [13] N. L. Smith, W. H. Heathcote, G. Hechenblaikner, E. Nugent, C. J. Foot. *Quasi-2D confinement of a BEC in a combined optical and magnetic potential* // Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics, **38**, 3, p. 223–235 (2005).
- [14] A. L. Gaunt, T. F. Schmidutz, I. Gotlibovych, R. P. Smith, Z. Hadzibabic. *Bose-Einstein condensation of atoms in a uniform potential* // Physical Review Letters, **110**, 20, p. 200406 (2013).
- [15] T. P. Meyrath, F. Schreck, J. L. Hanssen, C.-S. Chuu, M. G. Raizen. *Bose-Einstein condensate in a box* // Physical Review A, **71**, 4, p. 041604 (2005).
- [16] T. Radu, H. Wilhelm, V. Yushankhai, D. Kovrizhin, R. Coldea, Z. Tyliczynski, T. Lühmann, F. Steglich. *Bose-Einstein condensation of magnons in Cs₂CuCl₄* // Physical Review Letters, **95**, 12, p. 127202 (2005).

- [17] Ю. Е. Лозовик. *Сильные корреляции и новые фазы в системе экситонов и поляритонов, поляритонный лазер* // Успехи физических наук, **179**, 3, с. 309–313 (2009).
- [18] L. V. Butov, C. W. Lai, A. L. Ivanov, A. C. Gossard, D. S. Chemla. *Towards Bose-Einstein condensation of excitons in potential traps* // Nature, **417**, 6884, p. 47–52 (2002).
- [19] H. Deng, H. Haug, Y. Yamamoto. *Exciton-polariton Bose-Einstein condensation* // Reviews of Modern Physics, **82**, 2, p. 1489–1537 (2010).
- [20] J. J. Baumberg, A. V. Kavokin, S. Christopoulos, A. J. D. Grundy, R. Butté, G. Christmann, D. D. Solnyshkov, G. Malpuech, G. Baldassarri Höger von Högersthal, E. Feltn, J.-F. Carlin, N. Grandjean. *Spontaneous polarization buildup in a room-temperature polariton laser* // Physical Review Letters, **101**, 13, p. 136409 (2008).
- [21] M. Fattori, C. D’Errico, G. Roati, M. Zaccanti, M. Jona-Lasinio, M. Modugno, M. Inguscio, G. Modugno. *Atom interferometry with a weakly interacting Bose-Einstein condensate* // Physical Review Letters, **100**, 8, p. 080405 (2008).
- [22] A. N. Pyrkov, T. Byrnes. *Entanglement generation in quantum networks of Bose-Einstein condensates* // New Journal of Physics, **15**, 9, p. 093019 (2013).
- [23] J. Klaers, J. Schmitt, F. Vewinger, M. Weitz. *Bose-Einstein condensation of photons in an optical microcavity* // Nature, **468**, 7323, p. 545–548 (2010).
- [24] D. N. Sob’yanin. *Bose-Einstein condensation of light: General theory* // Physical Review E, **88**, 2, p. 022132 (2013).
- [25] R. M. Ziff, G. E. Uhlenbeck, M. Kac. *The ideal Bose-Einstein gas, revisited* // Physics Reports, **32**, 4, p. 169–248 (1977).
- [26] M. Holthaus, E. Kalinowski, K. Kirsten. *Condensate fluctuations in trapped Bose gases: Canonical vs. microcanonical ensemble* // Annals of Physics, **270**, 1, p. 198–230 (1998).
- [27] V. V. Kocharovskiy, V. V. Kocharovskiy, M. Holthaus, C. H. R. Ooi, A. Svidzinsky, W. Ketterle, M. O. Scully. *Fluctuations in ideal and interacting bose-einstein condensates: from the laser phase transition analogy to squeezed states and Bogoliubov quasiparticles* // Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics, **53**, p. 291–411 (2006).
- [28] P. Navez, D. Bitouk, M. Gajda, Z. Idziaszek, K. Rzazewski. *Fourth statistical ensemble for the Bose-Einstein condensate* // Physical Review Letters, **79**, 10, p. 1789–1792 (1997).
- [29] M. Holthaus, K. T. Kapale, V. V. Kocharovskiy, M. O. Scully. *Master equation vs. partition function: canonical statistics of ideal Bose-Einstein condensates* // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, **300**, 3, p. 433–467 (2001).
- [30] R. P. Feynman. *Statistical Mechanics: A Set Of Lectures*: Benjamin, New-York (1972).

- [31] D. ter Haar. *Lectures on Selected Topics in Statistical Mechanics*: Pergamon, Oxford (1977).
- [32] H. Kleinert. *Gauge fields in condensed matter*: World Scientific Singapore (1989).
- [33] R. K. Pathria. *Statistical Mechanics, International Series in Natural Philosophy*: Pergamon Press, Oxford, UK (1986).
- [34] В. А. Алексеев. *Функции распределения числа частиц в конденсате захваченного в ловушку идеального бозе-газа* // Журнал экспериментальной и теоретической физики, **119**, 4, с. 700–709 (2001).
- [35] В. А. Алексеев. *Статистика идеального однородного бозе-газа с фиксированным числом частиц* // Квантовая электроника, **31**, 5, с. 427–431 (2001).
- [36] K. Glaum, H. Kleinert, A. Pelster. *Condensation of ideal Bose gas confined in a box within a canonical ensemble* // Physical Review A, **76**, 6, p. 063604 (2007).
- [37] C. Weiss, M. Wilkens. *Particle number counting statistics in ideal Bose gases* // Optics Express, **1**, 10, p. 272–283 (1997).
- [38] Е. Д. Трифонов, С. Н. Загуляев. *О функции распределения числа частиц в бозе-эйнштейновском конденсате идеального газа* // Успехи физических наук, **180**, 1, с. 89–96 (2010).
- [39] V. V. Kocharovsky, V. V. Kocharovsky. *Analytical theory of mesoscopic Bose-Einstein condensation in an ideal gas* // Physical Review A, **81**, 3, p. 033615 (2010).
- [40] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. *Статистическая физика, часть 1*: Наука, Физматлит (1995).
- [41] P. T. Landsberg. *Thermodynamics and statistical mechanics*: Courier Corporation (2014).
- [42] M. Van den Berg, J. T. Lewis, J. V. Pulé. *A general theory of Bose-Einstein condensation* // Helvetica Physica Acta, **59**, 8, p. 1271–1288 (1986).
- [43] D. J. Toms. *Statistical mechanics of an ideal Bose gas in a confined geometry* // Journal of Physics A: Mathematical and General, **39**, 4, p. 713 (2006).
- [44] J. M. B. Noronha, D. J. Toms. *Bose-Einstein condensation in the three-sphere and in the infinite slab: Analytical results* // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, **392**, 18, p. 3984–3996 (2013).
- [45] А. З. Паташинский, В. Л. Покровский. *Флуктуационная теория фазовых переходов*: М.: Наука (1982).
- [46] S. Chatterjee, P. Diaconis. *Fluctuations of the Bose-Einstein condensate* // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **47**, 8, p. 085201 (2014).

Оглавление диссертации

ВВЕДЕНИЕ	4
Глава 1. Микроскопическая теория критических явлений в бозе-эйнштейновской конденсации идеального газа	26
1.1. Постановка задачи о бозе-эйнштейновской конденсации идеального газа в рамках канонического ансамбля. Точное решение	27
1.2. Кумулянтный анализ статистического распределения полного числа частиц вне конденсата	33
1.3. Выводы	39
Глава 2. Статистика населенности конденсата в мезоскопической ловушке в критической области. Классы универсальности	41
2.1. Автомодельный скейлинг статистики в окрестности критической точки. Гауссов и аномальный классы универсальности	41
2.2. Особенности статистических распределений для систем аномального класса	54
2.2.1 Асимптотика на правом крыле распределения	57
2.2.2 Асимптотика на левом крыле распределения	60
2.3. Выводы	65
Глава 3. Термодинамические характеристики газа в мезоскопической ловушке. Критические функции	67
3.1. Параметр порядка	68
3.2. Свободная энергия и средняя энергия	71
3.3. Теплоемкость. Автомодельная структура λ -особенности	77
3.4. Выводы	82
Глава 4. Влияние граничных условий на теплоемкость газа в критической области	84
4.1. Кубические ловушки-ящики с периодическими и нулевыми граничными условиями	85
4.2. Ловушки с изменяемыми граничными условиями: цилиндрическая геометрия	94
4.3. Ловушки с изменяемыми граничными условиями: декартова геометрия	100
4.4. Выводы	104
Глава 5. Неэквивалентность канонического и большого канонического ансамблей	106
5.1. Аналитическое описание мезоскопической системы во всей критической области в рамках большого канонического ансамбля	107
5.2. Автомодельное поведение химического потенциала	110
5.3. Сравнение канонического и большого канонического ансамблей: статистические распределения	115
5.4. Сравнение канонического и большого канонического ансамблей: термодинамические характеристики	120
5.5. О совпадении асимптотик термодинамических величин вне критической области для различных ансамблей	127
5.6. Выводы	131

Заключение	133
Приложение А. О спектральных дзета-функциях	136
Список литературы	143

ТАРАСОВ Сергей Владимирович

**АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ
И СТАТИСТИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН
В КРИТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ
БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКОЙ КОНДЕНСАЦИИ
ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА В МЕЗОСКОПИЧЕСКИХ
СИСТЕМАХ**

А в т о р е ф е р а т

Подписано к печати ХХ.04.2016.
Формат $60 \times 90^{1/16}$. Усл. печ. л. 2,0.
Тираж 100 экз. Заказ № 50 (2016).

Отпечатано в типографии ИПФ РАН,
603950, г. Н. Новгород, ул. Ульянова, 46