

Федеральное агентство научных организаций
Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
«Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной физики Российской академии наук»
(ИПФ РАН)

На правах рукописи

Широков Евгений Алексеевич

**Возбуждение пространственно-временного пакета
резонансных квазиэлектростатических волн
антеннами в магнитоактивной плазме**

01.04.08 — физика плазмы

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д. ф.-м. н., проф. Ю. В. Чугунов

Нижний Новгород – 2016

Оглавление

Введение	3
1. Возбуждение, распространение и приём пакета квазиэлектростатических волн в линейном приближении	14
1.1. Численное решение задачи о распределении заряда по поверхности антенны в квазистатическом приближении	19
1.2. Возбуждение и распространение прямоугольного импульса в однородной плазме. Общие соотношения	38
1.3. Возбуждение, распространение и приём прямоугольного импульса в однородной плазме. Излучение простых источников. Сравнение с данными эксперимента OEDIPUS-C.....	45
1.4. Возбуждение и распространение прямоугольного импульса в плазменном волноводе	58
2. Динамика плазменно-волновых каналов в магнитоактивной плазме в условиях резонанса	73
2.1. Самосогласованные уравнения для электрического поля, концентрации и температуры электронов	74
2.2. Самосогласованные нестационарные распределения электрического поля и электронной концентрации в плазменно-волновом канале.....	77
Заключение	89
Список литературы	91
Список публикаций автора по теме диссертации	100

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования

Антенны служат одним из основных инструментов в изучении космической плазмы. Они используются для диагностики её параметров (например, в ионосфере и магнитосфере Земли), регистрации шумовых излучений и генерации электромагнитного излучения в ней, а также для нелинейного воздействия на ионосферу. Актуальны также лабораторные исследования, в которых моделируются условия космической плазмы. Всё это обуславливает весьма значительный практический интерес к теоретическому исследованию возбуждения и распространения волн в магнитоактивной плазме.

Фундаментальное значение исследования этих вопросов обусловлено своеобразными свойствами, которые проявляет плазма в магнитном поле (анизотропия, пространственно-временная дисперсия, возможные неоднородность и нелинейность) и изучение которых представляет общефизический интерес [1–6].

К основным направлениям современных теоретических исследований возбуждения и распространения волн в магнитоактивной плазме следует отнести следующие.

1) Анализ пространственно-временных распределений поля излучения в линейном случае в различных условиях, например в неоднородной плазме.

2) Построение аналитических моделей, описывающих нелинейные (ионизационные, тепловые, стрикционные) явления в плазме, связанные с самовоздействием волн.

3) Развитие теоретических основ численных методов расчёта различных задач в плазме.

Основное внимание в исследованиях возбуждения и распространения волн в магнитоактивной плазме традиционно уделяется так называемому резонансному случаю, когда поверхность волновых векторов на заданной частоте не замкнута и имеет асимптоты, в окрестности которых может возбуждаться широкий волновой пакет с достаточно большими волновыми числами [5]. Асимптоты волновой поверхности образуют так называемый резонансный конус. Такие волны являются квазипотенциальными и достаточно эффективно возбуждаются антеннами, размер которых много меньше длины электромагнитной волны в плазме. Поскольку реально достижимый размер антенн, устанавливаемых на космических аппаратах (ракетах, искусственных спутниках), обычно мал в масштабах этой длины волны, то во многих космических экспериментах реализуется возбуждение (или приём) пакета резонансных квазиэлектростатических волн [7–10]. В силу особенностей своей пространственной структуры, обусловленных наличием сингулярности (или резкого максимума при учёте столкновений электронов) электрического поля на связанных с источником характеристиках гиперболического уравнения для потенциала, этот пакет волн позволяет осуществлять эффективное нелинейное воздействие на плазму. Это приводит, в частности, к возникновению вытянутых вдоль внешнего магнитного поля областей с повышенной концентрацией плазмы (плазменных дактов), в которых происходит каналирование волн. Изучение таких плазменно-волновых каналов также представляет интерес [11].

Первые работы, посвящённые возбуждению и распространению резонансных волн в анизотропной плазме в линейном режиме, относятся к середине XX века, когда начали интенсивно развиваться различные научные направления, связанные с освоением и изучением космоса [12]. К основным результатам тех исследований следует отнести следующие.

В приближении заданного (постоянного) распределения заряда вдоль тонкого квазистатического антенного провода был вычислен импеданс последнего в анизотропной плазме [13]. Отмечено, что в резонансных диапазонах частот этот импеданс имеет значительную ненулевую (в равновесной плазме — положительную) действительную часть, что соответствует возбуждению плазменной волны. Аналитическое решение соответствующей электродинамической задачи о распределении заряда вдоль тонкого антенного провода, основан-

ное на анализе интегрального уравнения, показало, что это распределение действительно можно считать постоянным, если угол ориентации антенны относительно магнитного поля не слишком близок к резонансному [14]. При этом параметр тонкости антенны, используемый при построении строгой теории антенн в вакууме [15], был обобщён на случай анизотропной среды. Сравнительно недавнее исследование показало, что если антенна ориентирована вдоль резонансного направления, то требуется учёт не только продольной, но и азимутальной зависимости заряда [A3]. В обзоре [16] обсуждается влияние плазмы на излучение квазистатических антенн, в частности анализируется влияние анизотропии и плазменной неоднородности вокруг антенны.

Решение задачи об излучении заданного монохроматического источника в однородной анизотропной среде было получено в статье [17]. В ней же было найдено поле диполя в такой среде. В работе [18] проанализировано излучение заданных источников в анизотропных средах и детально изучено излучение диполя, в частности найдена мощность его излучения. Излучение электрического диполя в холодной магнитоактивной плазме также было проанализировано в статье [19]. В ней же было обращено внимание на резонансное поведение поля: отмечено существование резонансного конуса, на котором в координатном пространстве поле имеет особенность (обращается в бесконечность). Анализ излучения короткого диполя и расчёт соответствующего импеданса по заданному распределению тока проводятся в работе [20]. Теоретическое и экспериментальное исследование поля излучения диполя в резонансном случае проведено в статье [21]. В статье [22] рассчитывается излучение диполя в горячей негиротропной плазме. Работа [23] посвящена анализу полей излучения точечных источников вблизи резонансного конуса в горячей анизотропной плазме. Общие вопросы распространения волн в анизотропных средах рассматриваются в книге [24]. Резонансные структуры поля излучения дипольных источников в магнитоактивной плазме с учётом поправок в дисперсионном уравнении, учитывающих столкновения электронов, возбуждение электромагнитной волны и тепловое движение частиц, найдены в статье [25].

Излучение нестационарных источников было проанализировано в статьях [26] для импульсного сигнала в форме дельта-функции и [27] для мгновенного включения монохроматического сигнала.

Общие закономерности распространения волн в неоднородной магнитоактивной плазме обсуждаются в работах [28–31]. Дополнительные особенности в распределении поля, обусловленные неоднородностью среды, могут возникать из-за появления так называемой параболической границы (между областями эллиптичности и гиперболичности уравнения для потенциала) и из-за возможного сгущения (уплотнения) характеристик гиперболического уравнения для потенциала вблизи этой границы. Изучение распространения волн в неоднородной магнитоактивной плазме в линейном случае было проведено для неоднородностей с простейшей геометрией [2]. Значительное внимание было уделено линейной электродинамике плазменных дактов [11, 32–41], т. к. они могут возбуждаться в лабораторной и околоземной плазме. При этом рассмотрение проводилось в основном без использования квазистатического приближения. Было показано, что в общем случае цилиндрические плазменные неоднородности, например, с повышенной концентрацией частиц могут каналировать электромагнитные волны, в частности свистового диапазона частот, т. е. могут рассматриваться как плазменные волноводы. Эти волноводы обладают достаточно сложной структурой собственных мод, которая состоит из волн не только дискретного, но и непрерывного спектра.

Аналізу нелинейных процессов в плазме посвящено значительное число работ, например [5, 42–48]. Дать сколь-нибудь полный обзор всех работ по этой тематике не представляется возможным. Относительно резонансных плазменных дактов, которым посвящена часть данной диссертации, можно отметить следующее. Впервые они были получены в лабораторных условиях в 1979 году [49]. В дальнейшем, на протяжении нескольких десятилетий, эксперименты по созданию таких плазменно-волновых каналов неоднократно ставились не только в лабораторной [50–52], но и в ионосферной плазме [53, 54]. Большое внимание уделялось режиму низкочастотной амплитудной модуляции сигнала на излучающей антенне, когда происходило эффективное переизлучение электромагнитных волн на частоте модуляции плазменным шнуром [55–61]. Общая нелинейная теория, объясняющая нестационарный процесс формирования плазменно-волновых каналов, всё ещё не развита. Самосогласованные стационарные распределения электрического поля и концентрации плазмы поперёк безграничного плазменного дакта найдены в статье [50]. Стационарные

распределения электрического поля, концентрации и температуры плазмы в канале конечной длины были найдены численно в ряде случаев [62, 63].

Численные методы в различных областях физики плазмы применяются достаточно широко [64, 65]. Численному решению задач возбуждения, когда по заданному потенциалу на поверхности антенны требуется рассчитать распределение заряда, уделяется значительно меньше внимания. Отметим, что в вакууме для антенн достаточно сложной геометрии такая задача решается методом моментов [66], позволяющим свести интегральное уравнение, соответствующее электродинамическому граничному условию на поверхности антенны (проводника), к системе линейных алгебраических [67–74]. В магнитоактивной плазме и прочих анизотропных средах соответствующее численное рассмотрение методом моментов до сих пор не проводилось. Причина этого заключается в том, что в общем случае в среде с анизотропией диэлектрической проницаемости уравнения для векторного и скалярного потенциала весьма затруднительно свести к сравнительно простой форме. Тем не менее следует отметить, что в последние годы появилось несколько работ по этой тематике. Например, было предложено обобщение калибровки Лоренца на случай неоднородной анизотропной среды [75], правда при этом не было уделено должного внимания возможному резонансному случаю.

Цели и задачи

Основной целью данной работы является развитие теории возбуждения и распространения пакета резонансных квазиэлектростатических волн в космической плазме. Соответствующие задачи заключаются в следующем.

1) Детальный теоретический анализ распространения импульсного сигнала с прямоугольной огибающей в магнитоактивной плазме в линейном режиме и сравнение результатов с экспериментальными данными двухточечного (излучатель—приёмник) ракетного эксперимента OEDIPUS-C в ионосфере.

2) Теоретический анализ процесса формирования (вытягивания вдоль внешнего магнитного поля) плазменно-волнового канала, каналирующего квазиэлектростатические волны.

3) Развитие теоретических основ численного метода моментов для расчёта распределения заряда по поверхности излучающей антенны в магнитоактив-

ной плазме.

Методы исследования

В работе использовались апробированные методы теоретических исследований плазмы, основанные на анализе уравнений Максвелла (с учётом диэлектрических свойств плазмы), а также уравнений для концентрации и температуры электронов. На отдельных этапах применялись апробированные численные методы интегрирования функций и решения алгебраических и трансцендентных уравнений.

Основные положения, выносимые на защиту

1) Импульс пакета медленных квазиэлектростатических волн, возбуждаемых в магнитоактивной плазме в резонансной полосе частот, испытывает заметное искажение формы, обусловленное эффектами группового запаздывания и аномального расплывания (последнее связано с учётом преимущественно линейного члена в разложении дисперсионного соотношения по частоте). Эти эффекты заметно проявлялись в двухточечном (излучатель—приёмник) ионосферном эксперименте OEDIPUS-C на частоте 100 кГц, результаты которого детально интерпретированы.

2) Линейное уравнение для нестационарного резонансного квазиэлектростатического поля излучения в магнитоактивной плазме имеет класс решений, которые найдены аналитически и зависят от «автомодельной» переменной, включающей в себя и время, и пространственные координаты.

3) Нестационарная самосогласованная нелинейная система уравнений для концентрации плазмы и величины электрического поля имеет автомодельное солитоноподобное решение, которое найдено аналитически и соответствует росту плазменно-волнового канала в направлении внешнего магнитного поля в условиях резонанса.

4) Численный метод моментов может быть использован для расчёта распределений заряда по поверхности антенн в магнитоактивной плазме в квазистатическом приближении, в том числе в резонансных условиях, когда функция Грина уравнения для потенциала комплексная и имеет особенность на характеристиках этого уравнения.

Перечисленные положения, выносимые на защиту, определяют **научную новизну** выполненных в работе исследований.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность результатов подтверждается их публикацией в 6 статьях в ведущих по данной тематике рецензируемых журналах «Известия вузов. Радиофизика», «Космические исследования» и «IEEE Transactions on Antennas and Propagation» [A1–A6]. Кроме того, результаты работы докладывались и обсуждались на семинарах отдела астрофизики и физики космической плазмы Института прикладной физики РАН, а также на следующих конференциях и семинарах [A7–A18]:

- 1) научная студенческая конференция Высшей школы общей и прикладной физики ННГУ «ВШОПФ'2011» (г. Нижний Новгород, 30–31 мая 2011 г.),
- 2) ежегодные конференции «Физика плазмы в Солнечной системе» (г. Москва, 6–10 февраля 2012 г., 4–8 февраля 2013 г., 10–14 февраля 2014 г., 16–20 февраля 2015 г., 15–19 февраля 2016 г.),
- 3) XVII научная конференция по радиофизике, посвящённая 100-летию со дня рождения В. С. Троицкого (г. Нижний Новгород, 13–17 мая 2013 г.),
- 4) 41st EPS Conference on Plasma Physics (г. Берлин, Германия, 23–27 июня 2014 г.),
- 5) XXXI URSI General Assembly and Scientific Symposium (г. Пекин, Китай, 16–23 августа 2014 г.),
- 6) 1st URSI Atlantic Radio Science Conference (Гран-Канария, Испания, 16–24 мая 2015 г.),
- 7) XVIII Конкурс работ молодых учёных ИПФ РАН (г. Нижний Новгород, 8–12 февраля 2016 г.),
- 8) XXXIX семинар «Физика авроральных явлений» (г. Апатиты, 29 февраля–4 марта 2016 г.).

Детальная интерпретация данных эксперимента OEDIPUS-C была включена как важный результат в Отчётный доклад Президиума Российской академии наук о научных достижениях РАН в 2012 году [76].

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы (работы автора приведены отдельным списком). Общий объём диссертации составляет 102 страницы, включая 27 рисунков и 2 таблицы. Список литературы содержит 106 наименований, из них 18 — работы автора по теме диссертации.

В главе 1 рассматриваются различные аспекты возбуждения, распространения и приёма пакета резонансных квазиэлектростатических волн в магнитоактивной плазме в линейном случае.

Раздел 1.1 посвящён развитию теоретических основ численного метода моментов на случай квазистатических антенн, находящихся в анизотропной плазме. Этот метод позволяет найти распределение заряда (тока) по поверхности антенны путём сведения интегрального уравнения, соответствующего электродинамическому граничному условию на поверхности антенны (проводника), к системе линейных алгебраических уравнений. Эта процедура проводится путём условного разбиения поверхности антенны на сравнительно малые сегменты. Теоретическое рассмотрение строится на анализе функции Грина уравнения для потенциала поля излучения антенны. Эта функция в резонансных условиях имеет особенности на характеристиках гиперболического уравнения для потенциала. Показывается, что несмотря на эту особенность функции Грина, которая является ядром интегрального оператора в соответствующем уравнении, метод моментов позволяет получить достаточно точные распределения заряда по поверхности антенны. Вычисляется погрешность определения (на основе рассчитанного распределения заряда) входного импеданса тонкой квазистатической антенны относительно теоретического значения. Показывается, что эта погрешность достаточно мала (порядка 1%), если число сегментов составляет порядка 10. Также большое внимание уделяется приближению «тонкой» антенны, которое в анизотропной среде отличается от вакуумного случая и значительно влияет на выбор способа сегментации.

В разделе 1.2 в квазистатическом приближении излагается линейная теория возбуждения нестационарного резонансного поля в магнитоактивной плазме. Рассмотрение ведётся для случая распространения прямоугольного импульса. С одной стороны, этот случай сравнительно прост для анализа, а

с другой — позволяет выявить характерные особенности в пространственно-временной структуре поля излучения. Рассчитываются соответствующие квазистатические потенциал, электрическое и магнитное поля излучения.

В разделе 1.3 построенная линейная теория применяется для нахождения нестационарного поля излучения тонких электрических диполей с разрывным (кусочно-постоянным в силу анализа, проведённого в разделе 1.1) и гладким распределениями заряда вдоль антенного провода. Показывается, что при распространении в магнитоактивной плазме прямоугольный импульс значительно искажается: он испытывает сильное групповое запаздывание (задержку) и значительное аномальное (с учётом только линейного члена в разложении дисперсионного соотношения по частоте, т. е. без учёта «классической», квадратичной по частоте, дисперсии) расплывание. Результаты теоретического рассмотрения сравниваются с результатами ионосферного эксперимента OEDIPUS-C по возбуждению, распространению и приёму резонансных волн с помощью антенн, установленных на двух ракетах (излучатель—приёмник), в котором уже на расстояниях порядка десяти длин волн (частота 100 кГц, длина волны 124 м) наблюдалось заметное запаздывание сигнала, приблизительно равное $(1 \div 3) \cdot 10^{-4}$ с, и значительное (в несколько раз) расплывание импульса с начальной длительностью 0,3 мс. Показывается, что построенная теория с учётом резонансного отклика приёмной антенны, который рассматривается качественно, объясняет результаты этого эксперимента в деталях. Также аналитически найден класс пространственно-временных распределений резонансного поля излучения в линейном режиме, которые зависят от «автомодельной» переменной, включающей в себя и время, и пространственные координаты.

В разделе 1.4 в квазистатическом приближении излагается линейная теория возбуждения нестационарного резонансного поля в бесконечно длинном цилиндрическом плазменном волноводе, ориентированном вдоль внешнего магнитного поля. При этом полагается, что в волноводе выполнены условия резонанса (т. е. возбуждения квазиэлектростатических волн), а в фоновой плазме — нет. Выводится и анализируется дисперсионное соотношение, определяются собственные моды, решается задача о возбуждении такого волновода сторонним дипольным источником в виде двух колец, а также рассматривается распространение прямоугольного импульса вдоль волновода. С одной стороны,

решение такой задачи позволяет естественным образом обобщить результаты разделов 1.2 и 1.3 на случай неоднородной среды, а с другой — является основой для постановки и решения нелинейной задачи о самоканалировании волн в плазме, которая анализируется далее.

В главе 2 анализируется задача об ионизационном самоканалировании квазиэлектростатических волн в плазме, приводящем к формированию вытянутых вдоль магнитного поля плазменных дактов.

В разделе 2.1 приводятся самосогласованные уравнения для распределения электрического поля излучения, концентрации и температуры электронов в условиях, когда баланс концентрации обусловлен диффузией заряженных частиц, ионизацией электронным ударом, диссоциативным прилипанием электронов, электронной рекомбинацией и источником, поддерживающим равновесную концентрацию фоновой плазмы. Отмечаются условия, при которых уравнение для концентрации имеет сравнительно простой вид уравнения диффузии.

В разделе 2.2 делаются оценки параметров канала (концентрации и температуры электронов, длины в стационарном режиме) по заданным параметрам фоновой плазмы (на примере характерных условий ночной ионосферы на высоте 150 км) и характеристикам излучающей квазиэлектростатические волны антенны. Предлагается упрощённая модель динамики (формирования) плазменно-волнового канала, в рамках которой предполагается, что единственная существенно нестационарная область — это сравнительно малая окрестность фронта ионизации. На основе этой модели аналитически рассчитываются самосогласованные автомодельные распределения поля излучения и концентрации электронов вблизи фронта ионизации. При этом температура электронов полагается однородной и постоянной в канале, а для зависимости частоты ионизации от амплитуды электрического поля используется распространённая степенная аппроксимация. Показывается, что в силу своеобразной пространственной конфигурации характеристик гиперболического уравнения для потенциала вблизи фронта ионизации реализуется квазиодномерный режим. При этом электрическое поле вблизи фронта ионизации резко возрастает и более чем на порядок величины превосходит пробойное значение.

В заключении сформулированы основные результаты, полученные в

диссертационной работе.

Автор признателен д. ф.-м. н., проф. Ю. В. Чугунову за поставленные задачи и научное руководство, к. ф.-м. н. В. М. Губченко, д. ф.-м. н. А. Г. Демехову, д. ф.-м. н., проф. А. В. Кудрину, д. ф.-м. н., чл.-корр. РАН Е. А. Марееву, к. ф.-м. н. В. А. Миронову и д. ф.-м. н., проф. В. Е. Семёнову за плодотворные дискуссии, а также доктору Х. Г. Джеймсу за предоставленные экспериментальные данные.

1. ВОЗБУЖДЕНИЕ, РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ПРИЁМ ПАКЕТА КВАЗИЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛН В ЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В настоящем разделе рассматриваются возбуждение, распространение и приём пространственно-временного пакета квазиэлектростатических волн в резонансной магнитоактивной плазме в линейном приближении. Ясно, что в силу линейности соответствующий анализ целесообразно проводить с помощью пространственно-временного метода Фурье. Поэтому вначале рассмотрим общие свойства плоской монохроматической волны в магнитоактивной плазме (вообще говоря, неоднородной) в резонансных условиях в квазистатическом приближении: приведём выражение для тензора диэлектрической проницаемости плазмы и сформулируем уравнения Максвелла в этом приближении.

Как уже отмечалось выше, плазма, находящаяся во внешнем магнитном поле, представляет собой анизотропную среду. Введём прямоугольную декартову систему координат (x, y, z) , в которой ось z направлена вдоль внешнего магнитного поля. Тогда в пренебрежении тепловым движением частиц (т. е. в холодном приближении) магнитоактивная плазма описывается тензором диэлектрической проницаемости [1–4, 6] вида

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где ε , η и g — поперечная, продольная и гиротропная компоненты тензора $\hat{\varepsilon}$

соответственно:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 1 + \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega_{\text{ce}}^2 - \omega^2} + \frac{\omega_{\text{pi}}^2}{\omega_{\text{ci}}^2 - \omega^2}, & \eta &= 1 - \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{\text{pi}}^2}{\omega^2}, \\ g &= \frac{\omega_{\text{ce}}}{\omega} \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2 - \omega_{\text{ce}}^2} - \frac{\omega_{\text{ci}}}{\omega} \frac{\omega_{\text{pi}}^2}{\omega^2 - \omega_{\text{ci}}^2}.\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь и далее временная зависимость выбрана в виде $\exp(-i\omega t)$, где $\omega = 2\pi f$, f — частота излучения, а ω_{pe} и ω_{pi} — плазменные частоты электронов и ионов, ω_{ce} и ω_{ci} — циклотронные частоты электронов и ионов соответственно:

$$\omega_{\text{pe}} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m_e}}, \quad \omega_{\text{ce}} = \frac{eH_0}{m_e c}, \quad \omega_{\text{pi}} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{M_i}}, \quad \omega_{\text{ci}} = \frac{eH_0}{M_i c},$$

N — концентрация плазмы, e — элементарный заряд, H_0 — напряжённость внешнего магнитного поля, m_e и M_i — массы электронов и ионов соответственно, c — скорость света в вакууме. Здесь предполагается, что плазма бесстолкновительная, квазинейтральная и содержит только однозарядные ионы одного сорта.

Перейдём теперь к уравнениям электромагнитного поля. Прежде всего введём сторонние (т. е. заданные и не зависящие от полей) источники. Считая, что сторонняя намагничённость отсутствует, запишем комплексные амплитуды объёмных плотностей сторонних токов \mathbf{j}_{ext} и зарядов ρ_{ext} в виде

$$\mathbf{j}_{\text{ext}} = -i\omega \mathbf{P}_{\text{ext}}, \quad \rho_{\text{ext}} = -\text{div} \mathbf{P}_{\text{ext}}, \quad (3)$$

где \mathbf{P}_{ext} — комплексная амплитуда вектора сторонней поляризации. Введённые таким образом токи \mathbf{j}_{ext} и заряды ρ_{ext} автоматически удовлетворяют уравнению непрерывности

$$\text{div} \mathbf{j}_{\text{ext}} - i\omega \rho_{\text{ext}} = 0. \quad (4)$$

Будем далее описывать электромагнитное поле вблизи антенны в квазистатическом приближении [5]. Это приближение справедливо, если мал параметр $v = L_{\text{tr}}/\lambda$, где L_{tr} — характерный размер излучателя, λ — длина электромагнитной волны в плазме. В нулевом порядке по малому параметру v

уравнения Максвелла сводятся к уравнениям

$$\operatorname{div}(\hat{\varepsilon}\mathbf{E}) = 4\pi\rho_{\text{ext}}, \quad (5)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \quad (6)$$

$$\mathbf{H} = 0, \quad (7)$$

а в первом — к уравнениям

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{ext}} - ik_0\hat{\varepsilon}\mathbf{E}, \quad (8)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \quad (9)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{H} — комплексные амплитуды напряжённостей электрического и магнитного полей соответственно, $k_0 = \omega/c$ — волновое число в вакууме. Иными словами, магнитное поле квазиэлектростатических волн много меньше электрического и может быть найдено методом возмущений: сначала, в нулевом приближении, из уравнений (5)–(6) может быть рассчитано электрическое поле, а затем, в первом приближении, из уравнений (8)–(9) может быть найдено магнитное поле, источниками которого являются сторонние токи \mathbf{j}_{ext} и рассчитанное в нулевом приближении квазиэлектростатическое поле $\hat{\varepsilon}\mathbf{E}$.

Согласно уравнениям (6) и (9) электрическое и магнитное поля можно описывать скалярным потенциалом Φ и векторным потенциалом \mathbf{A} соответственно:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi, \quad (10)$$

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}. \quad (11)$$

При этом уравнения (5) и (8) принимают вид

$$\operatorname{div}(\hat{\varepsilon}\nabla\Phi) = -4\pi\rho_{\text{ext}}, \quad (12)$$

$$\Delta\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{ext}} + ik_0\hat{\varepsilon}\mathbf{E}, \quad (13)$$

причём последнее уравнение получено в калибровке Кулона $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$, которая часто используется при решении квазистатических задач. Переход от уравнений (5), (6), (8), (9) для полей к уравнениям (12), (13) для потенциалов во многих случаях существенно упрощает решение электродинамических задач.

Уравнение (12) представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка. Расписывая его дифференциальный оператор, например, в системе координат (x, y, z) , можно убедиться, что оно относится к эллиптическому типу при $\varepsilon(\omega)\eta(\omega) > 0$ и к гиперболическому типу при $\varepsilon(\omega)\eta(\omega) < 0$. Ясно, что в последнем случае реализуется сравнительно сложная пространственно-временная структура поля излучения, которая качественно отличается от соответствующих структур в изотропных средах, включая вакуум. Согласно соотношениям (2) условие $\varepsilon(\omega)\eta(\omega) < 0$ выполняется в т. н. резонансных диапазонах $\omega < \omega_{ci}$, $\Omega_{\text{ЛН}} < \omega < \min(\omega_{\text{pe}}, \omega_{\text{ce}})$ и $\max(\omega_{\text{pe}}, \omega_{\text{ce}}) < \omega < \Omega_{\text{УН}}$, где $\Omega_{\text{ЛН}}$ и $\Omega_{\text{УН}}$ — ниже- и верхнегибридная частоты соответственно. В настоящей работе в основном рассматривается интервал

$$\Omega_{\text{ЛН}} < \omega < \omega_{\text{ce}}/2 < \omega_{\text{pe}} \quad (14)$$

нижнегибридного диапазона $\Omega_{\text{ЛН}} < \omega < \min(\omega_{\text{pe}}, \omega_{\text{ce}})$. В условиях (14) поперечная компонента тензора диэлектрической проницаемости положительна, продольная — отрицательна ($\varepsilon > 0$, $\eta < 0$), и при этом $\varepsilon < |\eta|$.

Вид волновой поверхности, задаваемой уравнением $\omega(\mathbf{k}) = \text{const}$, где \mathbf{k} — волновой вектор, для случая (14) в условиях однородной плазмы приведён на рис. 1. Видно, что волновая поверхность не замкнута и имеет асимптоты, определяемые уравнением $k_z = \pm\mu\kappa$, где κ — величина поперечной компоненты волнового вектора, $\mu = \sqrt{|\varepsilon/\eta|} = \text{tg}\theta_0 \ll 1$, θ_0 — резонансный угол. Поверхность асимптот $k_z = \pm\mu\kappa$ часто называется резонансным конусом. В координатном пространстве этот конус определяется характеристиками $\mu^2 z^2 = x^2 + y^2$ гиперболического уравнения (12). Из вида волновой поверхности ясно, что в направлениях, близких к асимптотическим (т. е. в окрестности резонансного конуса), может распространяться волновой пакет с очень широким спектром волновых чисел, а сами волновые числа могут быть достаточно большими, причём на самой асимптоте $k \rightarrow \infty$. Это как раз и соответствует медленным волнам и квазистатическому приближению. Полезно отметить, что в пространстве волновых чисел фазовая скорость гармоник квазиэлектростатических волн направлена вдоль резонансного конуса, а групповая — поперёк (см. рис. 1).

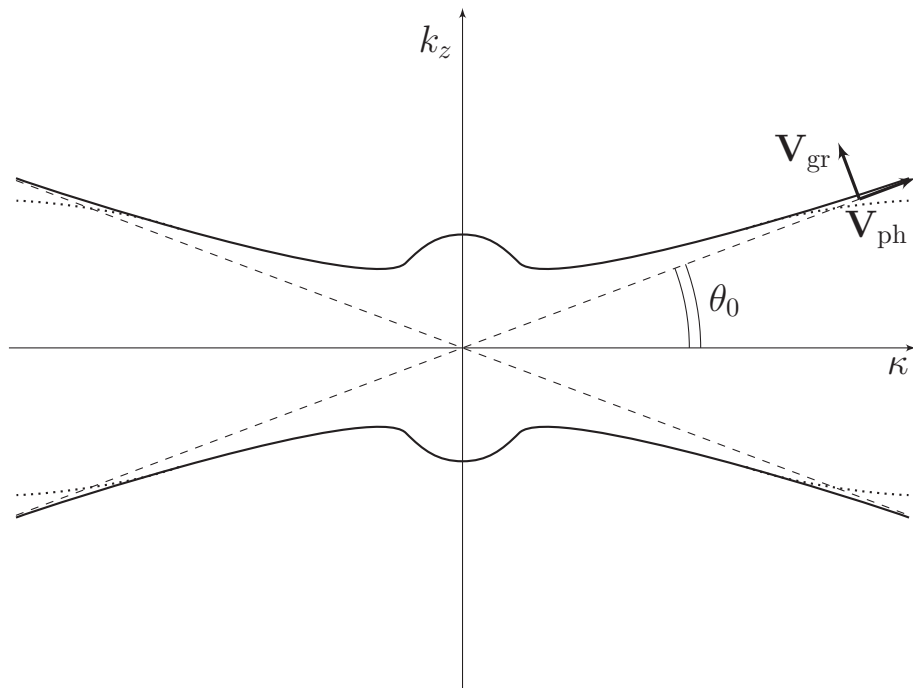


Рис. 1. Волновая поверхность (сплошные линии) и резонансный конус (штриховые линии) на заданной частоте из диапазона $\Omega_{\text{LH}} < \omega < \omega_{\text{ce}}/2 \ll \omega_{\text{pe}}$. Также указаны направления фазовой \mathbf{V}_{ph} и групповой \mathbf{V}_{gr} скоростей гармоник квазиэлектростатических волн. Пунктиром показано, как изменяется форма поверхности при учёте теплового движения частиц. В случае квазимонохроматического сигнала резонансный конус «размывается»: появляется множество асимптот, направление каждой из которых определяется частотой из спектра сигнала

1.1. Численное решение задачи о распределении заряда по поверхности антенны в квазистатическом приближении

Задача о распределении заряда (тока) по поверхности излучающей антенны, находящейся в плазме, является важнейшей в теории антенн. В самом деле, нахождение этого распределения позволяет вычислить входной импеданс антенны, поля излучения, излучаемую мощность, диаграмму направленности и т. д.

Постановка задачи о распределении заряда (тока) по поверхности антенны состоит в следующем. Антенна полагается идеальным проводником (т. е. средой с бесконечной проводимостью). Это позволяет записать граничное условие [77] на антенной поверхности S :

$$[\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{ext}}, \mathbf{n}]|_{\mathbf{r} \in S} = 0, \quad (15)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор, \mathbf{E} — комплексная амплитуда напряжённости электрического поля излучения антенны, \mathbf{E}_{ext} — комплексная амплитуда напряжённости заданного электрического поля сторонней электродвижущей силы (ЭДС) \mathcal{E}_0 в зазоре антенны, отвечающем точке подключения передатчика, квадратные скобки обозначают векторное произведение, \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали.

В квазистатическом случае условие (15) имеет вид

$$\Phi|_{\mathbf{r} \in S} = \Phi_0 = \text{const} \quad (16)$$

и дополняется граничным условием на сфере бесконечного радиуса, внутри которой находится антенна:

$$\Phi|_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} \rightarrow 0; \quad (17)$$

кроме того, на поверхности проводника нормальная компонента D_n вектора электрической индукции \mathbf{D} параллельна вектору \mathbf{E} и равна

$$D_n = -(\varepsilon \sin^2 \beta + \eta \cos^2 \beta) \frac{\partial \Phi}{\partial n}. \quad (18)$$

Здесь β — угол между внешней нормалью \mathbf{n} к поверхности проводника в данной точке и осью анизотропии, Φ — комплексная амплитуда квазистатического потенциала $\text{Re}[\Phi \exp(-i\omega t)]$, отвечающего полю излучения. Поскольку $\text{div}(\hat{\varepsilon}\mathbf{E}) = 0$ в свободном пространстве, функция Φ удовлетворяет в нём дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (19)$$

где (x, y, z) — декартовы координаты, направление оси z совпадает с направлением внешнего магнитного поля. Это уравнение относится к эллиптическому или гиперболическому типу в зависимости от знаков величин ε и η , т. е. от частотного интервала. Функция Грина уравнения (19) имеет вид [14]

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{cases} \frac{\text{sgn } \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon\eta} R_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}, & \varepsilon\eta > 0, \\ \frac{\text{sgn } \varepsilon}{\sqrt{|\varepsilon\eta|} R_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}, & \varepsilon\eta < 0, \mu^2 \tilde{z}^2 > \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2, \\ -\frac{i}{\sqrt{|\varepsilon\eta|} R_3(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}, & \varepsilon\eta < 0, \mu^2 \tilde{z}^2 < \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2, \end{cases} \quad (20)$$

где

$$\tilde{x} = x - x', \quad \tilde{y} = y - y', \quad \tilde{z} = z - z', \\ R_1^2 = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \mu^2 \tilde{z}^2, \quad R_2^2 = \mu^2 \tilde{z}^2 - \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2, \quad R_3^2 = -R_2^2.$$

С учётом граничных условий (16)–(18) решение уравнения (19) в свободном пространстве (вне антенного объёма) имеет вид

$$\Phi(\mathbf{r}) = \oiint_S \sigma(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS', \quad (21)$$

где $\sigma = D_n/(4\pi)$ — поверхностная плотность заряда на антенне. Если в полученном решении положить $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \in S$, то получим интегральное уравнение для распределения плотности заряда σ :

$$\Phi_0 = \oiint_S \sigma(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}') dS'. \quad (22)$$

В частотных интервалах, где $\varepsilon\eta > 0$, функция Грина (20) действительная

и не имеет особенностей при $\mathbf{r}_0 \neq \mathbf{r}'$. Уравнение (19) относится к эллиптическому типу и может быть сведено к уравнению Лапласа масштабированием координат. Следовательно, в нерезонансном случае не возникает качественных отличий от вакуумной ситуации.

В частотных интервалах, где $\varepsilon\eta < 0$, уравнение (19) относится к гиперболическому типу, и краевая задача является, вообще говоря, некорректной задачей математической физики. Функция Грина (20) в этом случае становится чисто мнимой при пересечении характеристик $\mu^2 \tilde{z}^2 = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2$ гиперболического уравнения, угол наклона которых к магнитному полю равен $\operatorname{arctg} \mu$ и определяется частотой излучения и параметрами среды. На самих характеристиках, как видно из формулы (20), функция Грина имеет особенность. В условиях резонанса реализуется возбуждение квазиэлектростатических волн, в которых электрическое поле много больше магнитного. В распределении электрического поля, возбуждаемого антенной, могут существовать особенности типа «слабой» сингулярности, а также более медленного по сравнению с нерезонансным случаем $\varepsilon\eta > 0$ убывания полей на больших расстояниях от источника. Регуляризация задачи может быть проведена, например, введением слабого поглощения, которое в дальнейшем устремляется к нулю, либо с использованием принципа причинности.

Продемонстрируем, как влияют вышеуказанные особенности поведения функции Грина в различных частотных интервалах на распределение заряда вдоль тонкого цилиндрического провода с радиусом a и длиной $2L$ ($L \gg a$), который ориентирован под углом α к магнитному полю [А3]. Будем считать, что антенна находится в плоскости (y, z) , а её центр совпадает с началом координат. Удобно перейти в цилиндрическую систему координат (ρ, φ, Z) , в которой ось Z направлена вдоль оси цилиндра (рис. 2):

$$\begin{aligned} x &= X, \quad y = Z \sin \alpha + Y \cos \alpha, \quad z = Z \cos \alpha - Y \sin \alpha, \\ X &= \rho \cos \varphi, \quad Y = \rho \sin \varphi. \end{aligned}$$

Далее в соответствии с уравнением (22) положим $\rho = \rho' = a$. Выражения, стоящие в знаменателе функции Грина, при этом преобразуются следующим

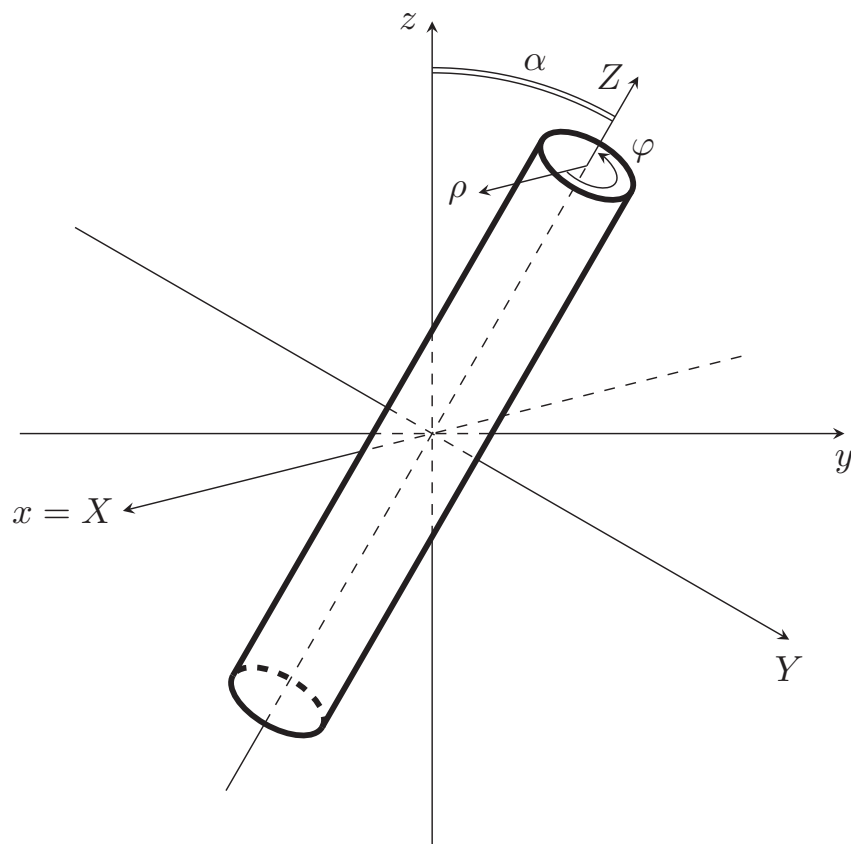


Рис. 2. Цилиндрическая антенна с радиусом a и длиной $2L$, ориентированная под углом α к магнитному полю

образом:

$$R_1^2 = a(1 - \mu^2)(\sin \varphi - \sin \varphi')(Z - Z') \sin(2\alpha) + \\ + F_1(Z - Z')^2 + a^2[F_2(\sin \varphi - \sin \varphi')^2 + (\cos \varphi - \cos \varphi')^2],$$

$$R_2^2 = -R_3^2 = -a(1 + \mu^2)(\sin \varphi - \sin \varphi')(Z - Z') \sin(2\alpha) + \\ + F_3(Z - Z')^2 + a^2[F_4(\sin \varphi - \sin \varphi')^2 - (\cos \varphi - \cos \varphi')^2],$$

где

$$F_1 = \mu^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha, \quad F_2 = \mu^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha, \\ F_3 = \mu^2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad F_4 = \mu^2 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha.$$

Интегральное уравнение (22) в координатах (ρ, φ, Z) имеет вид

$$\Phi_0 = a \int_{-L}^L \int_0^{2\pi} \sigma(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}') dZ' d\varphi'. \quad (23)$$

Аналитическое решение этого уравнения ищется методом регуляризации с целью выделения возможной особенности подынтегральной функции. Эта процедура сводится к записи уравнения в виде

$$\Phi_0 = a \sigma(\mathbf{r}_0) \int_{-L}^L \int_0^{2\pi} G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}') dZ' d\varphi' + a \int_{-L}^L \int_0^{2\pi} [\sigma(\mathbf{r}') - \sigma(\mathbf{r}_0)] G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}') dZ' d\varphi'. \quad (24)$$

Дальнейший анализ возможен при условии, что $\ln(FL^2/a^2) \gg 1$, где $F = F_1$ при $\varepsilon\eta > 0$ и $F = |F_3|$ при $\varepsilon\eta < 0$. Условие $\ln(FL^2/a^2) \gg 1$ при $F = 1$ отвечает параметру тонкости антенн в вакууме, с помощью которого была построена строгая теория таких антенн [15]. Таким образом, параметр $\ln(FL^2/a^2) \gg 1$ является обобщением параметра тонкости для анизотропных сред.

В нерезонансном случае $\varepsilon\eta > 0$ при условии $\ln(FL^2/a^2) \gg 1$ решение уравнения (24) даёт следующее распределение поверхностной плотности заряда:

$$\sigma(Z) = -\frac{\operatorname{sgn} \varepsilon \sqrt{\varepsilon\eta F} \Phi_0}{2\pi a \ln [F(L^2 - Z^2)/a^2]}. \quad (25)$$

Соответствующий импеданс $\bar{Z} = i\Phi_0/(\omega Q)$, где Q — полный заряд на антенне:

$$Q = a \int_{-L}^L \int_0^{2\pi} \sigma(Z, \varphi) dZ d\varphi,$$

равен

$$\bar{Z} = i \operatorname{sgn} \varepsilon \frac{\ln(2F^{1/2}L/a)}{\omega \sqrt{\varepsilon\eta} FL}. \quad (26)$$

Действительная часть импеданса в принятом приближении равна нулю. Это означает, что короткая антенна практически не излучает в нерезонансном случае. При $\varepsilon > 0$ импеданс носит ёмкостный характер, а при $\varepsilon < 0$ — индуктивный.

В резонансных частотных интервалах, при $\varepsilon\eta < 0$, ситуация существенным образом меняется. Необходимо отличать различные случаи ориентации антенны относительно резонансного конуса.

При $\alpha < \theta_0$, т. е. при $F_3 > 0$, возбуждающий плазменный резонанс антенный ток ввиду тонкости цилиндра расположен в основном в области пространства, где функция Грина является действительной. С логарифмической точностью основной вклад в импеданс даёт его мнимая часть. Это отвечает возбуждению квазистатического «реактивного» поля, однако действительная часть импеданса, отвечающая сопротивлению излучения, также значительна. Она связана с уносом энергии от антенны в возбуждённых квазиэлектростатических волнах. Это резонансные потери на возбуждение квазипродольных волн. Их наличие связано с мнимой частью функции Грина и её особенностью на резонансной поверхности. Решение уравнения (24) даёт следующий результат:

$$\sigma(Z) = \frac{\sqrt{|\varepsilon\eta|} F \Phi_0}{2\pi a \{-\operatorname{sgn} \varepsilon \ln [F(L^2 - Z^2)/a^2] - i\pi\}}, \quad (27)$$

$$\bar{Z} = \frac{(\pi/2) + i \operatorname{sgn} \varepsilon \ln(2\sqrt{F}L/a)}{\omega \sqrt{|\varepsilon\eta|} FL}. \quad (28)$$

При $\alpha > \theta_0$, т. е. при $F_3 < 0$, антенный ток течёт в основном в области пространства, где функция Грина чисто мнимая. Это, в частности, означает, что возбуждающий ток и электрическое поле в основном синфазны. Это обстоятельство приводит к тому, что в импедансе действительная часть,

отвечающая потерям энергии, существенно превышает мнимую часть, которая соответствует квадратурному сдвигу фаз между током и напряжением. Решая уравнение (24), находим

$$\sigma(Z) = \frac{i}{2\pi a \ln(2\sqrt{F}L/a)} \sqrt{|\varepsilon\eta|FL} \Phi_0 \times \left\{ 2 - \frac{\ln(1 - Z^2/L^2)}{\ln(2\sqrt{F}L/a)} + \ln(\mu^2 + F)^{1/2} + 2i \operatorname{sgn} \varepsilon \operatorname{arctg}\left(\frac{\mu}{F^{1/2}}\right) \right\}. \quad (29)$$

Соответственно, импеданс антенны равен

$$\bar{Z} = \frac{\ln\left[\left(2\sqrt{F}L/a\right)(\mu^2 + F)^{-1/2}\right] + i \operatorname{sgn} \varepsilon \operatorname{arctg}(\mu F^{-1/2})}{\omega \sqrt{|\varepsilon\eta|FL}}. \quad (30)$$

Во всех рассмотренных случаях распределение заряда не зависит от азимутального угла ввиду тонкости антенны. Кроме того, это распределение практически равномерное вдоль провода, за исключением концов $Z = \pm L$. На концах полученные распределения имеют логарифмическую особенность, связанную с фактическим исключением из рассмотрения краевых эффектов. Тем не менее эта особенность интегрируемая, и полученные выражения для импеданса совпадают с соответствующими выражениями, полученными в приближении заданного равномерного распределения заряда вдоль проводника [13]. Расчёт импеданса антенны по заданному распределению заряда (тока) с использованием комплексной теоремы Пойнтинга применяется достаточно часто, и алгоритм такого вычисления сводится к тому, что заданное распределение заряда (тока) ставится в уравнения Максвелла как сторонний заряд (ток). Также следует отметить, что реальные антенны представляют собой диполи и состоят из двух рассмотренных соосных цилиндров, в зазоре между которыми задана сторонняя ЭДС. На каждом из плечей распределение заряда близко к постоянному, а полные заряды на плечах имеют разный знак.

Наиболее сложный случай реализуется, когда антенна ориентирована вдоль резонансного конуса, т. е. $F = 0$. Из полученных формул следует, что при $F \rightarrow 0$ импеданс (как действительная, так и мнимая часть) стремится к бесконечности. В то же время понятно, что при этом нарушается условие

«тонкости» антенны $\ln(FL^2/a^2) \gg 1$ и следует более аккуратно рассматривать предельный переход $F \rightarrow 0$. Тогда интегрирование по углу φ' и координате Z' в интегральном уравнении (24) приводит к следующему результату:

$$\sigma(Z, \varphi) = \frac{i}{4aL} \sqrt{|\varepsilon\eta|2\mu aL} \Phi_0 \left[\left(\frac{Z}{L} - 1 \right)^{1/2} + \left(\frac{Z}{L} + 1 \right)^{1/2} \right] I^{-1}(\varphi), \quad (31)$$

где

$$I(\varphi) = \int_0^{2\pi} d\varphi' (\sin \varphi - \sin \varphi')^{-1/2}.$$

Поскольку

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \int_0^{2\pi} d\varphi' (\sin \varphi - \sin \varphi')^{-1/2} \right\}^{-1} \approx 0,5(1 + i),$$

импеданс в этом случае равен

$$\bar{Z} = \frac{3i \operatorname{sgn} \varepsilon}{2\omega \sqrt{|\varepsilon\eta|\mu aL}}. \quad (32)$$

Сопротивление излучения в данном приближении равно нулю. Это и понятно, т. к. при данной ориентации антенны возбуждающий резонанс ток перпендикулярен резонансному электрическому полю.

В реальных ситуациях, особенно в экспериментах по излучению волн в околосредней плазме антеннами, размещёнными на космических аппаратах, зачастую используются квазиэлектростатические волны, поскольку характерные (реально достижимые) размеры антенн много меньше длины электромагнитной волны в плазме. Поэтому с практической точки зрения исключительно важно уметь рассчитывать излучательные характеристики антенн более сложной геометрии. Аналитическое решение уравнения (22), даже приближённое, в таких ситуациях практически невозможно, и необходимо использовать численные методы.

Наиболее распространённым численным методом решения линейных интегральных уравнений является метод моментов, который широко применяется при расчётах антенн в изотропных средах, например в вакууме [67]. Суть этого

метода заключается в следующем [66]. Рассмотрим линейное уравнение

$$\hat{L}[f(\mathbf{r})] = g(\mathbf{r}), \quad (33)$$

где \hat{L} — заданный линейный оператор, $g(\mathbf{r})$ — заданная функция-источник, $f(\mathbf{r})$ — неизвестная функция-отклик. Представим приближённо функцию f в виде конечной суммы из N_0 слагаемых:

$$f(\mathbf{r}) \approx \sum_{n=1}^{N_0} X_n f_n(\mathbf{r}), \quad (34)$$

где X_n — подлежащие определению неизвестные коэффициенты разложения, $f_n(\mathbf{r})$ — заданные базисные функции. Тогда с учётом линейности оператора \hat{L} исходное уравнение примет вид

$$\sum_{n=1}^{N_0} X_n \hat{L}[f_n(\mathbf{r})] = g(\mathbf{r}). \quad (35)$$

Теперь зададим набор из N_0 весовых (тестовых) функций $w_m(\mathbf{r})$ и с их помощью получим из (35) N_0 уравнений

$$\sum_{n=1}^{N_0} A_{m,n} X_n = B_m, \quad m = 1, \dots, N_0, \quad (36)$$

где $A_{m,n} = \langle w_m, \hat{L}[f_n] \rangle$, $B_m = \langle w_m, g \rangle$ — так называемые моменты величин $\hat{L}[f_n]$ и g относительно функций w_m соответственно. Угловые скобки обозначают скалярное произведение функций, которое определяется по-разному в зависимости от конкретной задачи.

Таким образом, исходное линейное, например интегральное, уравнение (33) свелось к системе линейных алгебраических уравнений (36) для неизвестных X_n . Эта система может быть решена численными методами, например методом Гаусса. Выбор параметров метода моментов (N_0 , f_n и w_m) зависит от сходимости конечной суммы (34) к функции f . Важно подчеркнуть, что сходимость в строгом, математическом, смысле при $N_0 \rightarrow +\infty$ в общем случае не реализуется. Поэтому в расчётах подбору параметров метода уделяется большое внимание с целью обеспечения приближённого равенства конечной

суммы (34) функции f .

В случае квазистатического анализа антенн в плазме роль функции f играет поверхностная плотность заряда σ , функции g — заданный потенциал Φ_0 на поверхности проводника, а линейный оператор \hat{L} фактически определён в уравнении (22).

Проанализируем возможность использования метода моментов для расчёта антенн с простейшей геометрией в плазме. Особое внимание уделим резонансным условиям. Как уже отмечалось, функция Грина при этом обращается в бесконечность на характеристиках гиперболического уравнения для потенциала. Поскольку эта функция является ядром интегрального оператора \hat{L} , возможность приближённого равенства конечной суммы вида (34) искомому распределению плотности заряда (т. е. возможность сходимости метода) неочевидна и требует отдельного рассмотрения.

Рассмотрим вначале антенну в форме тонкого цилиндра с длиной $2L$ и радиусом a (см. рис. 2 выше). Ограничимся для начала случаем, когда распределение заряда не зависит от азимутального угла, т. е. реализуется нерезонансный случай или случай, когда угол ориентации антенны α не слишком близок к резонансному углу. Зададим основные параметры метода моментов следующим образом. Скалярное произведение функций целесообразно определить как

$$\langle q_1, q_2 \rangle = \int_{-L}^L q_1(Z)q_2(Z)dZ. \quad (37)$$

Условно разделим антенный провод на $(N_0 + 1)$ равных сегментов с длиной $\Delta = 2L/(N_0 + 1)$, которые стыкуются в точках с координатами $Z_n = -L + n\Delta$, $n = 1, \dots, N_0$. Базисные функции определим как

$$f_n(Z) = \begin{cases} 1, & Z_{n-1} < Z < Z_n, \\ 0 & \text{при других } Z, \end{cases} \quad (38)$$

где $Z_0 = -L$, $Z_{N_0+1} = L$ (см. рис. 3). Такой выбор обусловлен тем, что на интервале $[Z_{n-1}, Z_n]$ функция f_n качественно близка к истинному, т. е. почти постоянному, распределению заряда вдоль всего антенного провода. (При этом в резонансных частотных диапазонах, когда функция σ комплексная,

коэффициенты разложения X_n являются комплексными.) При анализе антенн в вакууме выбор базисных функций указанным способом, как показывают многочисленные расчёты [70], оправдан и позволяет получить в целом правильные распределения зарядов (токов) вдоль антенных проводов. Те же расчёты показывают, что выбор весовых функций в меньшей степени влияет на сходимость, чем выбор базисных функций. Поэтому из соображений удобства вычисления скалярного произведения (37) весовые функции зададим в виде дельта-функций (см. рис. 4), отличных от нуля в серединах сегментов:

$$w_m(Z) = \delta(Z - Z_m + 0,5\Delta). \quad (39)$$

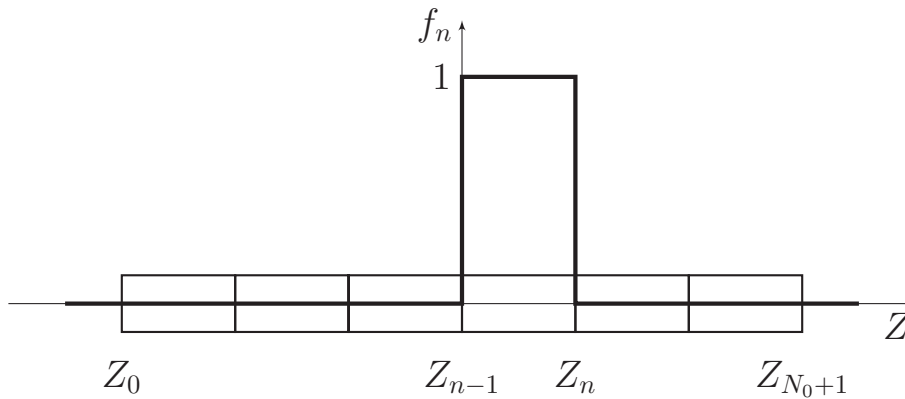


Рис. 3. Выбор базисных функций $f_n(Z)$

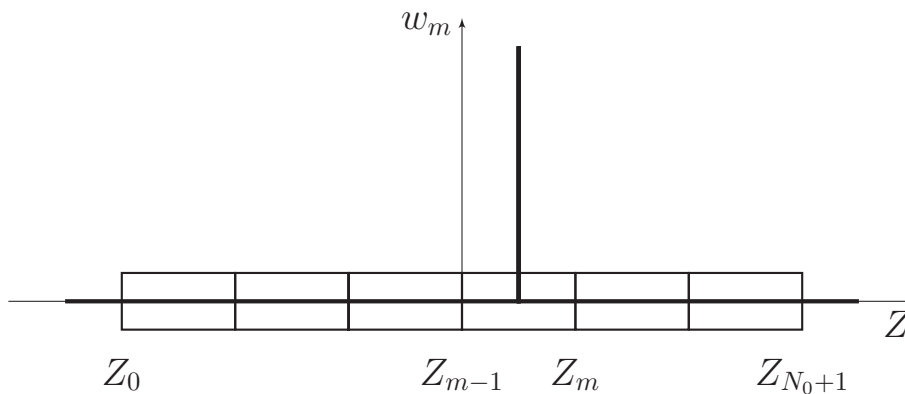


Рис. 4. Выбор весовых функций $w_m(Z)$

Коэффициенты системы линейных алгебраических уравнений (36) тогда

записываются в виде

$$A_{m,n} = a \int_{Z_{n-1}}^{Z_n} \int_0^{2\pi} G(Z_m - 0,5\Delta, \varphi, Z', \varphi') dZ' d\varphi',$$

$$B_m = \Phi_0$$

и не зависят от азимутального угла φ в силу вышесказанного несмотря на зависимость функции Грина от него.

Наиболее просто коэффициенты $A_{m,n}$ вычисляются при $\alpha = 0$. В этом случае зависимость от азимутального угла φ пропадает уже в исходном интегральном уравнении — точнее, в выражении для функции Грина — благодаря условию $a \ll \mu L$. В случае ориентации под некоторым другим углом, не слишком близким к резонансному, зависимость от угла φ пропадает в результате интегрирования из-за гораздо более сильного условия $\ln(F\Delta^2/a^2) \gg 1$. Оно по существу означает «тонкость» провода по отношению не только к его длине $2L$, но и к длине Δ отдельного сегмента.

Приведём для примера выражения для величин $\hat{L}[f_n]$ в случае $\varepsilon\eta > 0$:

$$\hat{L}[f_n] = \begin{cases} \frac{2\pi a \operatorname{sgn} \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon\eta F}} \ln \left[\frac{2F}{a^2} (Z_n - Z)(Z - Z_{n-1}) \right], & Z_{n-1} < Z < Z_n, \\ \frac{2\pi a \operatorname{sgn} \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon\eta F}} \ln \left(\frac{Z - Z_n}{Z - Z_{n-1}} \right), & Z < Z_{n-1}, \\ \frac{2\pi a \operatorname{sgn} \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon\eta F}} \ln \left(\frac{Z - Z_{n-1}}{Z - Z_n} \right), & Z > Z_n. \end{cases} \quad (40)$$

В случае $\varepsilon\eta < 0$ соответствующие выражения гораздо более громоздкие.

Первая серия расчётов была посвящена анализу антенны, ориентированной вдоль магнитного поля, в различных частотных диапазонах. Графики функции $\sigma(Z)$, найденной методом моментов, приведены на рис. 5 для различного числа сегментов вместе с соответствующими графиками, полученными из теоретических расчётов (см. формулы (25) и (27)), в резонансном случае при $\varepsilon = 1$, $\eta = -50$, $L/a = 10^3$. Видно, что зависимости близки. Исследование сходимости метода моментов в зависимости от числа сегментов, на которые условно разделяется антенный провод, иллюстрирует рис. 6. На нём приведена относительная погрешность Σ вычисленного импеданса \bar{Z}_{calc} относительно

теоретического значения \bar{Z} (формулы (26) и (28)) как функция числа сегментов $M_0 = N_0 + 1$ в различных частотных интервалах. Погрешности определены как

$$\Sigma(\text{Re } \bar{Z}) = \frac{\text{Re } \bar{Z}_{\text{calc}} - \text{Re } \bar{Z}}{\text{Re } \bar{Z}} \cdot 100 \%, \quad (41)$$

$$\Sigma(\text{Im } \bar{Z}) = \frac{\text{Im } \bar{Z}_{\text{calc}} - \text{Im } \bar{Z}}{\text{Im } \bar{Z}} \cdot 100 \%. \quad (42)$$

Анализ приведённых на рис. 5 и 6 зависимостей показывает, что метод моментов действительно позволяет с достаточно высокой точностью найти распределение заряда вдоль антенного провода не только в нерезонансном, но и в резонансном случае. Оптимальное число сегментов, при котором погрешность вычисления минимальна ($|\Sigma| < 1 \%$), составляет $8 \div 24$.

Вторая серия расчётов была посвящена анализу антенны в резонансном случае, которая ориентирована под углом $\alpha = 0,99\theta_0$ к магнитному полю, при $L/a = 10^4$, когда условие $\ln(FL^2/a^2) \gg 1$ выполняется. На рис. 7 показана зависимость относительной ошибки Σ от числа сегментов. Видно, что сходимость метода значительно ухудшается, если сегментов более 40. Это связано с тем, что при относительно большом числе сегментов, когда величина Δ сравнительно мала, нарушается сильное условие $\ln(F\Delta^2/a^2) \gg 1$. Ясно, что для более корректного рассмотрения необходимо учитывать зависимость величин $L[f_n]$ не только от продольной координаты, но и от азимутального угла φ . При этом целесообразно перейти от рассмотрения цилиндра к рассмотрению эллипсоида вращения с полуосями L и a (рис. 8). Рассмотрение эллипсоида позволяет строго проанализировать распределение заряда в том числе и в окрестности «концов» $Z = \pm L$, что крайне затруднительно сделать для цилиндра из-за особенностей формы последнего. Заметим, что ранее было теоретически показано, что импеданс антенны в форме «тонкого» эллипсоида совпадает с импедансом антенны в форме цилиндрического проводника с теми же размерами [14].

Введём вытянутую сфероидальную систему координат (ζ, ν, φ) , иногда называемую вырожденной эллипсоидальной, где $\zeta \geq 0$, $\nu \in [0, \pi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$,

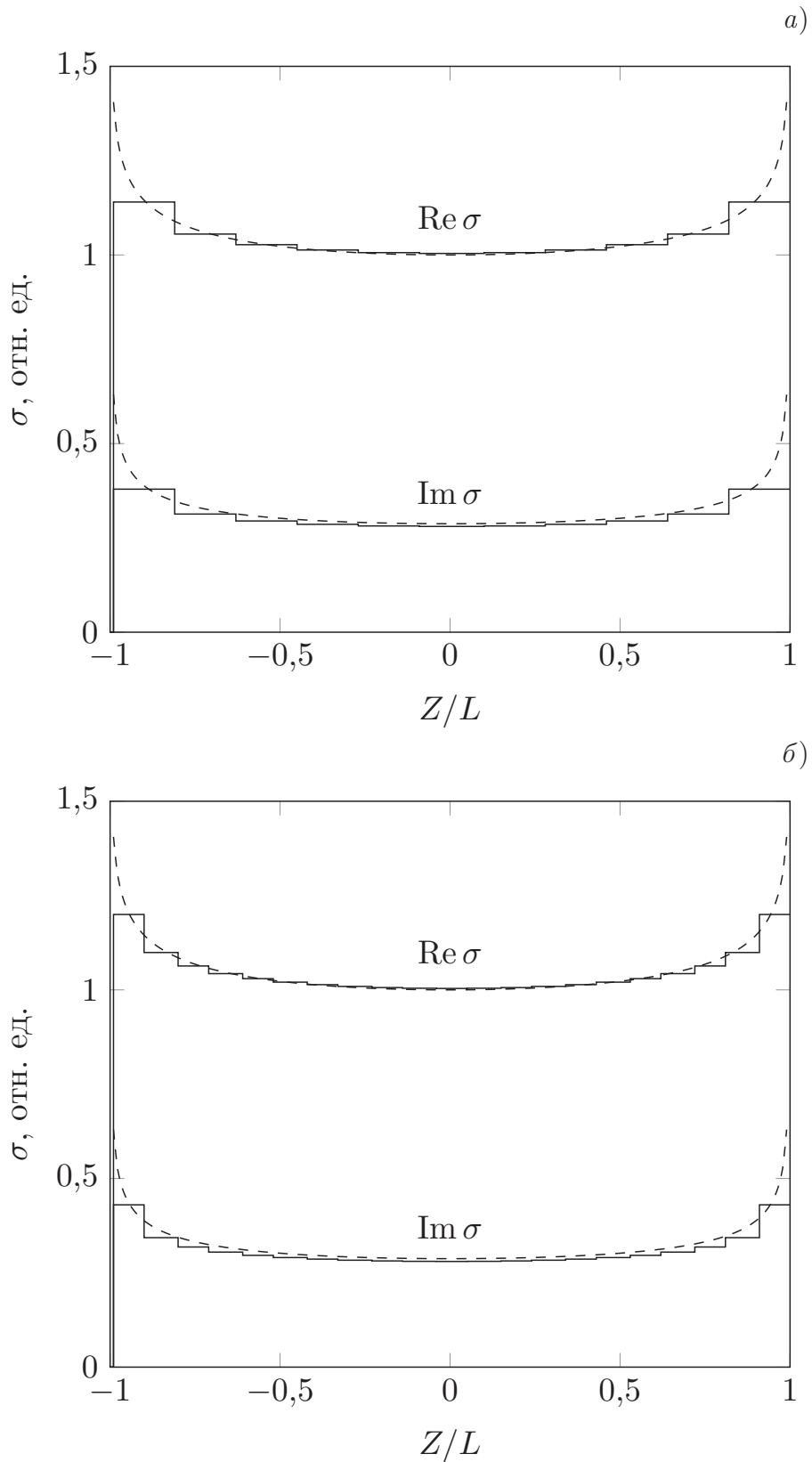


Рис. 5. Зависимости плотности заряда от продольной координаты при $\varepsilon = 1$, $\eta = -50$, $L/a = 10^3$, $f = 0,1$ МГц. Штриховыми линиями показаны теоретические зависимости, сплошными — полученные методом моментов при 11 сегментах (а) и 21 сегменте (б)

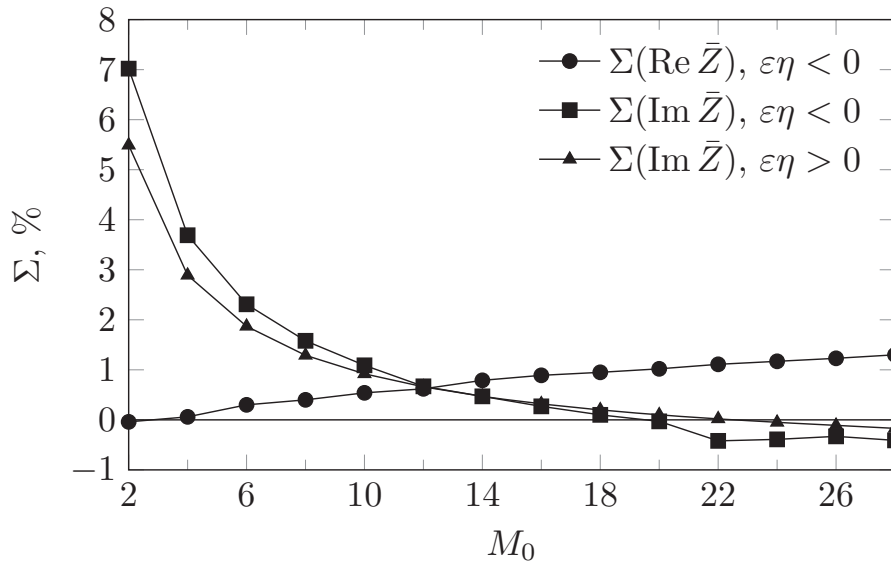


Рис. 6. Исследование сходимости метода моментов в нерезонансном ($\varepsilon = \eta = 1, \varepsilon\eta > 0, f = 10$ МГц) и резонансном ($\varepsilon = 1,3, \eta = -44, \varepsilon\eta < 0, f = 0,1$ МГц) случаях при $L/a = 10^4$

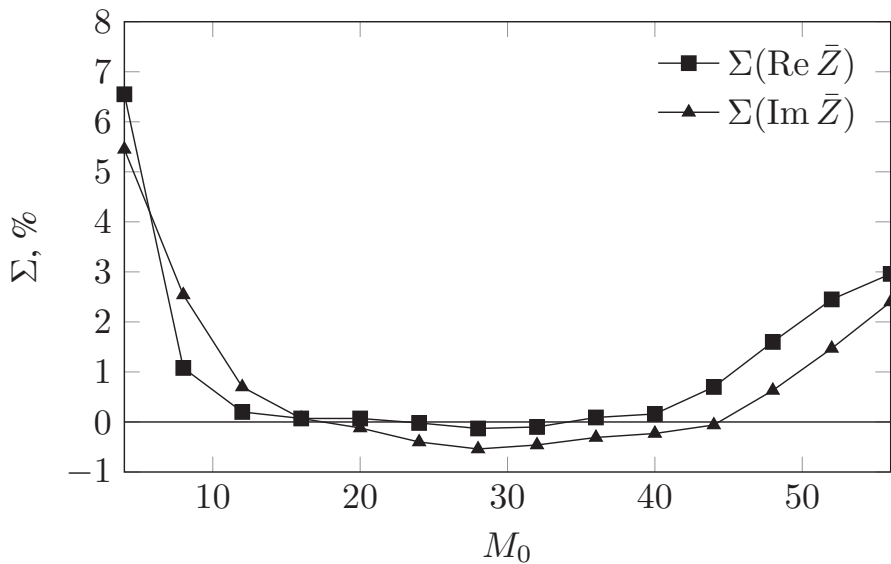


Рис. 7. Исследование сходимости метода моментов в резонансном случае, когда антенна ориентирована под углом $\alpha = 0,99\theta_0$ к магнитному полю; $L/a = 10^4, \varepsilon = 1, \eta = -50, f = 0,1$ МГц

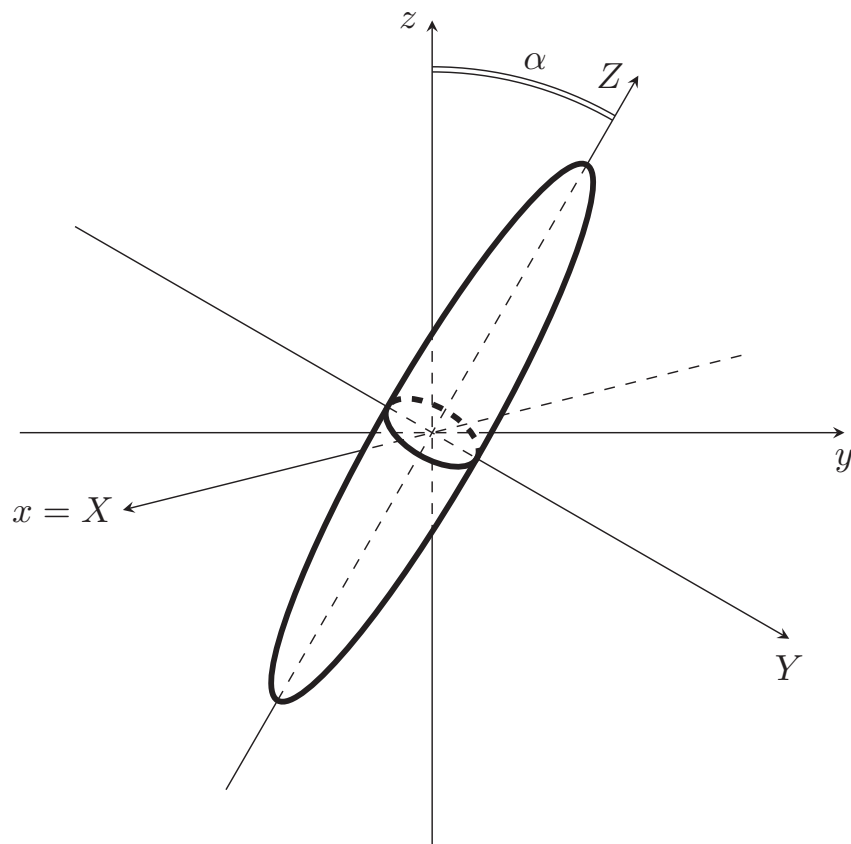


Рис. 8. Антенна в форме эллипсоида вращения, ориентированная под углом α к магнитному полю

согласно равенствам

$$X = \bar{A} \operatorname{sh} \zeta \sin \nu \cos \varphi, \quad (43)$$

$$Y = \bar{A} \operatorname{sh} \zeta \sin \nu \sin \varphi, \quad (44)$$

$$Z = \bar{A} \operatorname{ch} \zeta \cos \nu. \quad (45)$$

При этом координатная поверхность $\zeta = \zeta_0 = \text{const}$ является эллипсоидом вращения с полуосями $\bar{A} \operatorname{sh} \zeta_0$ и $\bar{A} \operatorname{ch} \zeta_0$:

$$\frac{X^2}{\bar{A}^2 \operatorname{sh}^2 \zeta_0} + \frac{Y^2}{\bar{A}^2 \operatorname{sh}^2 \zeta_0} + \frac{Z^2}{\bar{A}^2 \operatorname{ch}^2 \zeta_0} = 1.$$

Если величина ζ_0 достаточно мала, то $\bar{A} \operatorname{sh} \zeta_0 \ll \bar{A} \operatorname{ch} \zeta_0$ и для рассмотрения тонкого эллипсоида можно положить $a = \bar{A} \operatorname{sh} \zeta_0$ и $L = \bar{A} \operatorname{ch} \zeta_0$. Интегральное уравнение (22) в новых координатах записывается в виде

$$\Phi_0 = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sigma(\nu', \varphi') G(\nu, \varphi, \nu', \varphi') J(\nu') d\nu' d\varphi', \quad (46)$$

где $J(\nu') = \bar{A}^2 \sqrt{\operatorname{sh}^2 \zeta_0 + \sin^2 \nu'} \operatorname{sh} \zeta_0 \sin \nu'$.

Скалярное произведение функций в данном случае определяется как

$$\langle q_1, q_2 \rangle = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} q_1(\nu, \varphi) q_2(\nu, \varphi) J(\nu) d\nu d\varphi. \quad (47)$$

Сегменты, на которые условно разделяется поверхность эллипсоида, представляют собой части этой поверхности, ограниченные координатными поверхностями $\nu = \nu_{i_\nu} - 0,5\Delta_\nu$, $\nu = \nu_{i_\nu} + 0,5\Delta_\nu$ и $\varphi = \varphi_{i_\varphi} - 0,5\Delta_\varphi$, $\varphi = \varphi_{i_\varphi} + 0,5\Delta_\varphi$, где $i_\nu = 1, \dots, N_\nu$ и $i_\varphi = 1, \dots, N_\varphi$ — номера координатных поверхностей, $\Delta_\nu = \pi/N_\nu$ и $\Delta_\varphi = 2\pi/N_\varphi$ — угловые расстояния между соседними координатными поверхностями. Общее число сегментов равно $N_0 = N_\nu N_\varphi$. Если последовательно пронумеровать сегменты от 1 до N_0 , фиксируя в первую очередь координату φ , то номер n некоторого сегмента S_n определяет номера координатных поверхностей как

$$i_\nu(n) = n - \left(\left[\frac{n}{N_\nu} \right] - 1 \right) N_\nu, \quad i_\varphi(n) = 1 + \left[\frac{n}{N_\nu} \right],$$

где квадратные скобки обозначают целую часть числа. Базисные и весовые функции выбираются по аналогии с одномерным случаем. Так, функция f_n равна единице на сегменте с номером n и нулю за его пределами:

$$f_n(\nu, \varphi) = \begin{cases} 1, & (\nu, \varphi) \in S_n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (48)$$

Весовые функции выбираются в виде дельта-функций, которые отличны от нуля в середине сегмента S_m :

$$w_m(\nu, \varphi) = \delta(\nu - \nu_{i_\nu(m)}, \varphi - \varphi_{i_\varphi(m)}). \quad (49)$$

Элементы $\hat{L}[\sigma_n]$ при выбранных базисных функциях, очевидно, равны

$$\hat{L}[\sigma_n] = \int_{\nu_{i_\nu(n)-0,5\Delta_\nu}}^{\nu_{i_\nu(n)+0,5\Delta_\nu}} \int_{\varphi_{i_\varphi(n)-0,5\Delta_\varphi}}^{\varphi_{i_\varphi(n)+0,5\Delta_\varphi}} G(\nu, \varphi, \nu', \varphi') J(\nu') d\nu' d\varphi'. \quad (50)$$

Вычисление элементов матрицы $A_{m,n}$ проводится следующим образом. Диагональные элементы, при $m = n$, вычисляются строго:

$$A_{n,n} = J(\nu_{i_\nu(n)}) \int_{\nu_{i_\nu(n)-0,5\Delta_\nu}}^{\nu_{i_\nu(n)+0,5\Delta_\nu}} \int_{\varphi_{i_\varphi(n)-0,5\Delta_\varphi}}^{\varphi_{i_\varphi(n)+0,5\Delta_\varphi}} G(\nu_{i_\nu(n)}, \varphi_{i_\varphi(n)}, \nu', \varphi') J(\nu') d\nu' d\varphi'. \quad (51)$$

Недиагональные элементы, при $m \neq n$, вычисляются приближённо в упрощающем предположении, что $f_n(\nu, \varphi) \approx \Delta_\nu \Delta_\varphi \delta(\nu - \nu_{i_\nu(n)}, \varphi - \varphi_{i_\varphi(n)})$:

$$A_{m,n} = G(\nu_{i_\nu(m)}, \varphi_{i_\varphi(m)}, \nu_{i_\nu(n)}, \varphi_{i_\varphi(n)}) J(\nu_{i_\nu(m)}) J(\nu_{i_\nu(n)}) \Delta_\nu \Delta_\varphi. \quad (52)$$

По существу это упрощение означает, что при расчёте влияния одного сегмента на другой первый можно считать точечным зарядом (разумеется, переменным во времени). Такое приближение часто применяется в алгоритмах для вакуумного случая и достаточно хорошо работает для удалённых друг от друга сегментов и несколько хуже — для соседних [70]. В случаях, когда необходима большая точность, соседние элементы матрицы $A_{m,n}$ (т. е. с индексами, отличающимися на единицу) вычисляются точно по аналогии с формулой (51).

При этом в резонансных диапазонах, вообще говоря, разбиение по-

верхности эллипсоида на сегменты может быть таковым, что выражение $G(\nu_{i_\nu(m)}, \varphi_{i_\varphi(m)}, \nu_{i_\nu(n)}, \varphi_{i_\varphi(n)})$ в равенстве (52) обращается в бесконечность из-за упомянутой выше особенности функции Грина. Есть 3 способа обойти эту особенность. Во-первых, можно выбрать такое разбиение, при котором это выражение не обращается в бесконечность. Во-вторых, можно ввести слабое поглощение, благодаря которому функция Грина регуляризуется. В-третьих, элемент матрицы можно просто вычислить строго по аналогии с формулой (51).

Наконец, приведём выражение для элементов B_m :

$$B_m = \Phi_0 J(\nu_{i_\nu(m)}). \quad (53)$$

На рис. 9 для примера приведено найденное методом моментов распределение модуля плотности заряда $|\sigma|$ при заданном угле $\varphi = 0$ вдоль поверхности «тонкого» эллипсоида вращения, вытянутого (ориентированного) вдоль резонансного направления.

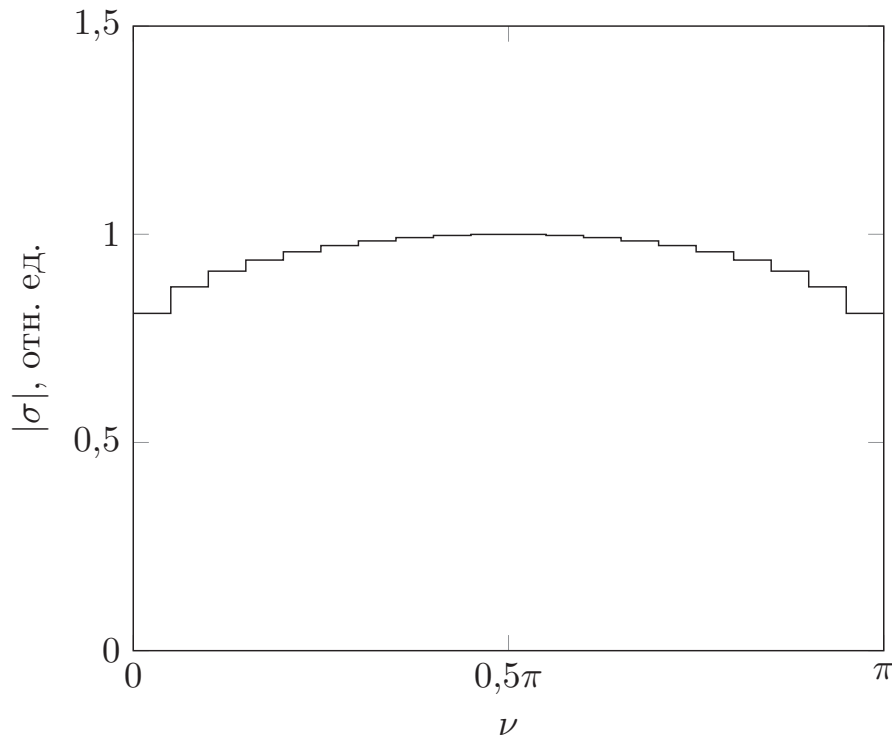


Рис. 9. Зависимость модуля плотности заряда от координаты ν при $\varepsilon = 1$, $\eta = -50$, $L/a = 10^4$, $f = 0,1$ МГц, полученная методом моментов при $N_\nu = 20$. Эллипсоид вытянут вдоль резонансного направления

Таким образом, метод моментов может быть использован для расчёта антенн в магнитоактивной плазме. При этом следует учитывать возможную

зависимость плотности заряда от азимутального угла, т. е. нецелесообразно явно использовать приближение «тонкого» провода $\ln(FL^2/a^2) \gg 1$, которое может нарушаться, во-первых, для отдельных сегментов, а во-вторых — в случае, когда какая-то часть антенной системы ориентирована достаточно близко к резонансному направлению. Возможен также численный анализ достаточно сложных антенн из «тонких» проводов, соединяющихся между собой или примыкающих к замкнутым проводящим поверхностям. В таких случаях необходимо принимать во внимание закон сохранения заряда (правило Кирхгофа) в точках соединения «тонких» проводов и вводить дополнительное слагаемое в базисных функциях на тех сегментах замкнутой поверхности, где происходит примыкание «тонких» проводов. Антенны подобной сложной геометрии рассчитываются с помощью численного электромагнитного кода (Numerical Electromagnetics Code, NEC) в изотропных средах, в частности в вакууме [74].

1.2. Возбуждение и распространение прямоугольного импульса в однородной плазме. Общие соотношения

Рассмотрим излучение и распространение импульсного сигнала в безграничной однородной плазме в резонансных условиях. Запишем уравнение для потенциала $\Phi(\mathbf{r}, t)$ в виде

$$\operatorname{div}[\hat{\varepsilon}(\mathbf{r}, t)\nabla\Phi(\mathbf{r}, t)] = -4\pi\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t), \quad (54)$$

где $\hat{\varepsilon}(\mathbf{r}, t)$ — линейный интегродифференциальный оператор. Рассмотрим источник стороннего заряда в виде прямоугольного сигнала с длительностью T на дипольной антенне, т. е. положим

$$\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) = Q\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r})\Pi_{[0,T]}(t)\exp(-i\omega_0 t), \quad (55)$$

где Q — полный заряд на одном из плечей диполя, $\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ — функция, описывающая распределение заряда по антенне, $\Pi_{[0,T]}(t)$ — единичная функция на отрезке $[0, T]$, $\omega_0 = 2\pi f_0$, f_0 — несущая частота. Сигнал будем полагать

квазимонохроматическим, т. е. $T \gg f_0^{-1}$. Рассмотрение прямоугольного сигнала, с одной стороны, относительно просто, а с другой — позволяет изучить характерные свойства нестационарных полей, распространяющихся в средах со сложной пространственно-временной дисперсией.

Представляя потенциал $\Phi(\mathbf{r}, t)$ в виде интеграла Фурье в пространстве и времени, из уравнения (54) найдём:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{Q}{4\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\Gamma(\omega) \rho_{\text{ext}}(\mathbf{k})}{k_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) k_\beta} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t} d\omega d\mathbf{k}, \quad (56)$$

где $\alpha, \beta = x, y, z$ — индексы, соответствующие декартовым осям, $\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})$ — компоненты тензора $\hat{\varepsilon}(\omega, \mathbf{k})$, $\rho_{\text{ext}}(\mathbf{k})$ — фурье-спектр функции $\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r})$,

$$\Gamma(\omega) = \frac{\exp[i(\omega - \omega_0)T] - 1}{i(\omega - \omega_0)}$$

— временной спектр функции $\Pi_{[0,T]}(t) \exp(-i\omega_0 t)$. Перепишем выражение (56) в виде

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{Q}{4\pi^3 \varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\Gamma(\omega) \rho_{\text{ext}}(\mathbf{k})}{D(\omega, \mathbf{k})} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t} d\omega d\mathbf{k}, \quad (57)$$

где $D(\omega, \mathbf{k}) = k_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} k_\beta / \varepsilon$ — выражение, определяющее дисперсионное уравнение $D(\omega, \mathbf{k}) = 0$, в котором учтены поправки [5], связанные с тепловым движением частиц, столкновениями электронов, возбуждением электромагнитной волны и временной дисперсией в среде (все поправки полагаются малыми):

$$D(\omega, \mathbf{k}) = \kappa^2 - \frac{k_z^2}{\mu^2} + \frac{\delta^2}{\varepsilon} (A\kappa^4 + B\kappa^2 k_z^2 + Ck_z^4) + \\ + i \left(\kappa^2 \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} + k_z^2 \frac{\delta\eta}{\eta} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \left[\frac{\varepsilon}{\mu^2} + \frac{g^2}{\varepsilon(1 + \mu^2)} \right] + \frac{2}{\mu_0^3} (\mu - \mu_0) k_z^2. \quad (58)$$

Здесь $\mu = \mu(\omega) = \sqrt{|\varepsilon(\omega)/\eta(\omega)|}$, $\mu_0 = \mu(\omega_0)$, $\delta = V_{\text{te}}/\omega$, V_{te} — тепловая скорость

электронов,

$$A = -\frac{3\omega_{\text{pe}}^2\omega^2}{(\omega^2 - \omega_{\text{ce}}^2)(\omega^2 - 4\omega_{\text{ce}}^2)}, \quad B = -\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2 - \omega_{\text{ce}}^2} \left[1 + \frac{\omega^2(5\omega^2 - \omega_{\text{ce}}^2)}{(\omega^2 - \omega_{\text{ce}}^2)^2} \right],$$

$$C = -\frac{3\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2}, \quad \delta\varepsilon = \frac{\nu_e}{\omega} \cdot \frac{\omega_{\text{pe}}^2(\omega^2 + \omega_{\text{ce}}^2)}{(\omega^2 - \omega_{\text{ce}}^2)^2}, \quad \delta\eta = \frac{\nu_e}{\omega} \cdot \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2},$$

$\nu_e \ll \omega$ — частота столкновений электронов. Отметим, что запись выражения $D(\omega, \mathbf{k})$ в форме (58) позволяет использовать простейшие выражения (2) для компонент тензора $\hat{\varepsilon}(\omega, \mathbf{k})$, а влияние, например, теплового движения и столкновений учесть в соответствующих поправках дисперсионного уравнения. При этом даже в ситуациях, когда необходимо учитывать столкновения, величины ε , η и g — действительные числа.

Будем рассматривать направление на резонансном конусе в плоскости (x, z) . Это не ограничивает общность рассмотрения, если нас интересует излучение в этом направлении. Поэтому перейдём от системы координат (x, y, z) к системе (τ, y, ξ) поворотом исходной системы на угол $(0,5\pi - \theta_0)$, где в силу квазимонохроматичности сигнала резонансный угол θ_0 определяется для несущей частоты, вокруг оси y (см. рис. 10). При этом ось τ направлена вдоль резонансного конуса, ось ξ — поперёк ему.

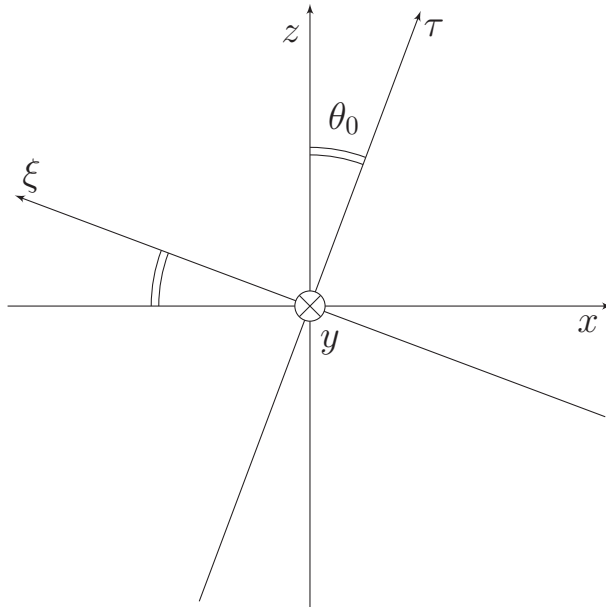


Рис. 10. Поворот координатных осей

Интегрирование в (57) по k_τ осуществляется с использованием принципа

причинности или метода малого поглощения. В результате с использованием леммы Жордана и условия излучения $\partial\omega/\partial k_\tau > 0$ получаем

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{iQ}{2\pi^2\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \iint_{S_+} \frac{\Gamma(\omega)\rho_{\text{ext}}(k_\tau^*, k_y, k_\xi)}{\frac{\partial D}{\partial k_\tau}(\omega, k_\tau^*, k_y, k_\xi)} e^{i(k_\tau^*\tau + k_y y + k_\xi \xi - \omega t)} d\omega dk_y dk_\xi,$$

где $k_\tau^* = k_\tau(k_y, k_\xi)$ — функция, при которой выражение $D(\omega, \mathbf{k})$ обращается в нуль, а интегрирование ведётся по той части S_+ волновой поверхности, на которой выполняется условие излучения. Последний интеграл берётся по k_y методом стационарной фазы, если расстояние τ от источника до точки наблюдения достаточно велико по сравнению с характерным размером источника. Фаза экспоненты при этом достигает экстремума на кривой

$$\left\{ k_\tau = -\frac{1}{3}R^2 k_\xi^3 + \frac{1}{4k_\xi \lambda^2} + isk_\xi + k_\xi \frac{\mu - \mu_0}{1 + \mu_0^2}, \quad k_y = 0, \quad k_\xi \in (-\infty, +\infty) \right\},$$

однако на поверхности S_+ лежит лишь та часть этой кривой, на которой $k_\xi \in (0, +\infty)$. Здесь R — эффективный дебаевский радиус, λ — длина электромагнитной волны, s — безразмерная частота столкновений электронов:

$$R^2 = -\frac{3\mu\delta^2}{2\varepsilon} (A \sin^4 \theta_0 + B \sin^2 \theta_0 \cos^2 \theta_0 + C \cos^4 \theta_0),$$

$$\lambda = \frac{c}{\omega} \left[\frac{2\varepsilon}{\mu} + \frac{2g^2\mu}{\varepsilon(1 + \mu^2)} \right]^{-1/2},$$

$$s = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} \sin^2 \theta_0 + \frac{\delta\eta}{\eta} \cos^2 \theta_0 \right).$$

Условие малости тепловой поправки (т. е. слабости пространственной дисперсии) соответствует неравенству $R \ll L_{\text{tr}}$. Условие малости электромагнитной поправки (т. е. условие квазистатики) соответствует приведённому ранее неравенству $L_{\text{tr}} \ll \lambda$. Условие малости столкновительной поправки соответствует неравенству $s \ll 1$.

Учитывая вышесказанное и ограничиваясь учётом слагаемого первого порядка в разложении дисперсионного соотношения в ряд по степеням величины $(\omega - \omega_0)$, т. е. пренебрегая дисперсионным расплыванием импульса,

интегрированием по k_y получаем

$$\Phi(\tau, \xi, t) = \frac{\mu^{1/2} Q e^{-i\pi/4}}{(2\pi)^{3/2} \tau^{1/2} \varepsilon L_{\text{tr}}} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \bar{k}^{-1/2} \Gamma(\omega) \rho_{\text{ext}}(0, 0, \bar{k}) e^{i\Psi(\bar{k}) + iq(\omega - \omega_0)\tau\bar{k} - i\omega t} d\omega d\bar{k},$$

где $\bar{k} = k_\xi L_{\text{tr}}$ — безразмерное волновое число,

$$\Psi(\bar{k}) = \bar{k}\xi - \frac{1}{3}R^2\tau\bar{k}^3 + \frac{\tau}{4\bar{k}\lambda^2} + i s \tau \bar{k},$$

величины τ , ξ , λ и R нормированы на длину L_{tr} ,

$$q = \left. \left(\frac{\partial \mu}{\partial \omega} \right) \right|_{\omega=\omega_0} \frac{1}{1 + \mu_0^2}.$$

Интегрируя, наконец, по частоте ω , получаем

$$\Phi(\tau, \xi, t) = \Phi_0(\tau) \tilde{\Phi}(\tau, \xi, t) e^{-i\omega_0 t}, \quad (59)$$

где

$$\tilde{\Phi}(\tau, \xi, t) = \begin{cases} I_\Phi\left(\frac{t}{q\tau}\right), & 0 \leq t \leq T, \\ I_\Phi\left(\frac{t}{q\tau}\right) - I_\Phi\left(\frac{t-T}{q\tau}\right), & t > T, \end{cases} \\ \Phi_0(\tau) = \frac{(2\mu)^{1/2} Q e^{-i\pi/4}}{(\pi\tau)^{1/2} \varepsilon L_{\text{tr}}}, \quad I_\Phi(\bar{\beta}) = \int_0^{\bar{\beta}} \frac{d\bar{k}}{\sqrt{\bar{k}}} \rho_{\text{ext}}(0, 0, \bar{k}) \exp[i\Psi(\bar{k})].$$

Следовательно, для резонансного электрического поля $E_\xi = -\partial\Phi/\partial\xi$, которое ортогонально резонансной поверхности, получаем

$$E_\xi(\tau, \xi, t) = E_0(\tau) \tilde{E}(\tau, \xi, t) e^{-i\omega_0 t}, \quad (60)$$

где

$$\tilde{E}(\tau, \xi, t) = \begin{cases} I_E\left(\frac{t}{q\tau}\right), & 0 \leq t \leq T, \\ I_E\left(\frac{t}{q\tau}\right) - I_E\left(\frac{t-T}{q\tau}\right), & t > T, \end{cases}$$

$$E_0(\tau) = -\frac{i(2\mu)^{1/2}Qe^{-i\pi/4}}{(\pi\tau)^{1/2}\varepsilon L_{\text{tr}}^2}, \quad I_E(\bar{\beta}) = \int_0^{\bar{\beta}} d\bar{k} \rho_{\text{ext}}(0, 0, \bar{k}) \exp[i\Psi(\bar{k})] \sqrt{\bar{k}}.$$

При получении выражений для функций $\Phi(\tau, \xi, t)$ и $E_\xi(\tau, \xi, t)$ учитывалось, что функция $\Gamma(\omega)$ отлична от нуля только в малой окрестности точки $\omega = \omega_0$.

Из полученных выражений (59) и (60) видно, что электрическое поле и потенциал медленно спадают вдоль резонансной поверхности по закону $\Phi, E_\xi \propto \tau^{-1/2}$, а их поперечная структура обусловлена видом распределения заряда на источнике. При этом электрическое поле и потенциал локализованы на резонансной поверхности, т. е. они спадают в направлении оси ξ гораздо быстрее, чем в направлении τ : $|\partial E_\xi / \partial \xi| \gg |\partial E_\xi / \partial \tau|$, $|\partial \Phi / \partial \xi| \gg |\partial \Phi / \partial \tau|$. Также следует отметить, что полученный волновой пакет является суперпозицией плоских волн, бегущих преимущественно в одном направлении, задаваемом осью ξ , ортогональной к резонансной поверхности. Результирующее распределение электрического поля имеет волнообразный характер. При возбуждении плазменного резонанса малым источником вдоль резонансной поверхности переносится поперечная по отношению к последней структура распределения заряда на источнике.

Процесс формирования поля излучения вблизи резонансного конуса при его возбуждении прямоугольным импульсом достаточно сложен. Он зависит, конечно, от распределения заряда на антенне и от её геометрии. В фиксированную точку вблизи резонансной поверхности приходит множество плоских волн с различными волновыми числами k_ξ . Групповая скорость этих волн направлена перпендикулярно волновой поверхности. Интерференция гармоник приводит к картине поля, описываемой формулой (60). Импульс поля с резонансной несущей частотой не является прямоугольным несмотря на то, что здесь учитывается только линейный член разложения дисперсионного соотношения

по частоте, т. е. классическое расплывание, связанное с учётом квадратичного слагаемого, во внимание не принимается. (Такое расплывание формы импульса, которое не обусловлено учётом квадратичного слагаемого, называется аномальным.) Структура поля в фиксированной точке пространства (τ, ξ) в момент времени t определяется суперпозицией пространственных гармоник с волновыми числами, лежащими в интервале от $k_\xi = 0$ до $k_\xi = t/(q\tau)$ при $0 \leq t \leq T$ и в интервале от $k_\xi = (t - T)/(q\tau)$ до $k_\xi = t/(q\tau)$ при $t > T$.

Будем теперь искать магнитное поле. Как следует из уравнения (8), оно создаётся двумя источниками, сторонним электрическим током и его квазистатическим электрическим полем. Магнитное поле, обусловленное токами, имеет вакуумную структуру, т. к. в уравнение для него не входят свойства среды. Поэтому основной интерес представляет магнитное поле резонансного электрического поля. В это магнитное поле основной вклад даёт компонента H_y . Это следует, например, из соображений о направлении потока энергии: групповая скорость и, следовательно, вектор Пойнтинга направлены вдоль оси τ , а электрическое поле имеет только компоненту E_ξ . Расписывая уравнение (8) по координатам в системе (τ, y, ξ) и преобразуя для этого компоненты тензора $\hat{\epsilon}$, получаем уравнение для компоненты H_y :

$$\frac{\partial H_y}{\partial \xi} = ik_0 \eta \mu E_\xi. \quad (61)$$

Решая его методом преобразования Фурье, находим

$$H_y(\mathbf{r}, t) = \frac{\eta \mu \omega_0 Q}{4\pi^3 i \epsilon c} \int_{-\infty}^{+\infty} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\Gamma(\omega) \rho_{\text{ext}}(\mathbf{k})}{D(\omega, \mathbf{k})} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t} d\omega d\mathbf{k}, \quad (62)$$

Интеграл по частоте и волновому вектору в полученном выражении в точности совпадает с интегралом в соотношении (57). Сразу можно записать, что

$$H_y(\tau, \xi, t) = H_0(\tau) \tilde{\Phi}(\tau, \xi, t) e^{-i\omega_0 t}, \quad (63)$$

где

$$H_0(\tau) = \frac{\omega_0 Q e^{-i\pi/4}}{(2\mu\pi\tau)^{1/2} c L_{\text{tr}}},$$

а функция $\tilde{\Phi}(\tau, \xi, t)$ определена выше. Следовательно, структура магнитного

поля совпадает со структурой потенциала Φ . В частности, оно тоже спадает по закону $H_y \propto \tau^{-1/2}$ вдоль резонансной поверхности.

Полезно отметить следующее. Как видно из полученных соотношений, в выражение для компоненты E_ξ не входит скорость света в вакууме, а выражение для H_y — входит, причём $H_y \propto c^{-1}$. Значит, в выражение для вектора Пойнтинга $\mathbf{S} = c \operatorname{Re}[\mathbf{E}, \mathbf{H}^*]/(8\pi)$, где индекс * означает комплексное сопряжение, скорость света не входит. Это обстоятельство подчёркивает квазистатический характер электромагнитного поля излучаемых медленных волн.

1.3. Возбуждение, распространение и приём прямоугольного импульса в однородной плазме. Излучение простых источников. Сравнение с данными эксперимента OEDIPUS-C

Для более детального анализа резонансных структур, найденных в предыдущем подразделе, разберём излучение некоторых простых источников — тонких квазистатических (коротких) диполей. В соответствии с разделом 1.1 зададим прямоугольное (кусочно-постоянное) распределение заряда и, следовательно, треугольное распределение тока вдоль антенного провода. (Ограничимся случаем, когда диполь ориентирован не вдоль резонансной поверхности.) Тогда для тонкой дипольной антенны с длиной $2L_{\text{tr}}$, ориентированной под углом $\alpha \neq \theta_0$ к магнитному полю, имеем

$$\rho_{\text{ext}}(0, 0, \bar{k}) = \frac{\sin^2(\bar{\Gamma}\bar{k}/2)}{\bar{\Gamma}\bar{k}}, \quad (64)$$

где $\bar{\Gamma} = \sin \alpha \cos \theta_0 \cos \varphi + \cos \alpha \sin \theta_0$, φ — полярный угол. Интегралы $I_E(\bar{\beta})$ и $I_\Phi(\bar{\beta})$, определяющие структуру электрического и магнитного полей, в этом случае представляет собой сумму трёх слагаемых, выражающихся через неполные гамма-функции комплексного аргумента [78]:

$$I_E(\bar{\beta}) = -\frac{1}{4\bar{\Gamma}} \left[I_E^{(1)}(\bar{\beta}) - 2I_E^{(2)}(\bar{\beta}) + I_E^{(3)}(\bar{\beta}) \right], \quad (65)$$

$$I_\Phi(\bar{\beta}) = -\frac{1}{4\bar{\Gamma}} \left[I_\Phi^{(1)}(\bar{\beta}) - 2I_\Phi^{(2)}(\bar{\beta}) + I_\Phi^{(3)}(\bar{\beta}) \right], \quad (66)$$

где

$$\begin{aligned}
I_E^{(1)}(\bar{\beta}) &= [-i(\xi + is\tau - \bar{\Gamma})]^{-3/2} \gamma[3/2, -i\bar{\beta}(\xi + is\tau - \bar{\Gamma})], \\
I_E^{(2)}(\bar{\beta}) &= [-i(\xi + is\tau)]^{-3/2} \gamma[3/2, -i\bar{\beta}(\xi + is\tau)], \\
I_E^{(3)}(\bar{\beta}) &= [-i(\xi + is\tau + \bar{\Gamma})]^{-3/2} \gamma[3/2, -i\bar{\beta}(\xi + is\tau + \bar{\Gamma})], \\
I_\Phi^{(1)}(\bar{\beta}) &= [-i(\xi + is\tau - \bar{\Gamma})]^{-1/2} \gamma[1/2, -i\bar{\beta}(\xi + is\tau - \bar{\Gamma})], \\
I_\Phi^{(2)}(\bar{\beta}) &= [-i(\xi + is\tau)]^{-1/2} \gamma[1/2, -i\bar{\beta}(\xi + is\tau)], \\
I_\Phi^{(3)}(\bar{\beta}) &= [-i(\xi + is\tau + \bar{\Gamma})]^{-1/2} \gamma[1/2, -i\bar{\beta}(\xi + is\tau + \bar{\Gamma})],
\end{aligned}$$

Из приведённых соотношений следует, что электрическое и магнитное поля имеют вид суперпозиции трёх пакетов волн. Слагаемые $I_E^{(2)}(\bar{\beta})$, $I_\Phi^{(2)}(\bar{\beta})$ соответствует возбуждению волн резонансного конуса зазором антенны, а слагаемые $I_E^{(1)}(\bar{\beta})$, $I_\Phi^{(1)}(\bar{\beta})$ и $I_E^{(3)}(\bar{\beta})$, $I_\Phi^{(3)}(\bar{\beta})$ — концами антенны. Это означает, что наиболее сильно в резонансной структуре поля проявляются области с особенностями распределения заряда вдоль антенного провода. Эти особенности связаны с тем, что в зазоре плотность заряда скачком меняет знак при переходе с одного провода на другой, а на концах антенны обрывается до нуля. Эти особенности распределения заряда вызывают также сингулярности поля при $\xi = 0$ и $\xi \pm \bar{\Gamma}L_{tr} = 0$ (в размерных переменных), которые исчезают в результате учёта либо столкновений (что и сделано в приведённых формулах), либо тепловой поправки в дисперсионном уравнении, связанной с возможностью возбуждения плазменной волны.

На рис. 11 приведена найденная по формулам (65) и (66) пространственная структура электрического и магнитного полей, создаваемых разрывным распределением заряда вида (64), при $t = T/2$, $T = 0,3$ мс, $\omega_{pe} = 15,7 \cdot 10^6$ с⁻¹, $\omega_{ce} = 9,11 \cdot 10^6$ с⁻¹, $f_0 = 100$ кГц. Видно, что поля имеют максимум на характеристиках гиперболического уравнения (54), исходящих из зазора и концов антенны под резонансным углом к магнитному полю и отвечающих несущей частоте.

Короткие антенны, в которых распределение тока близко к треугольному, использовались в эксперименте OEDIPUS-C [9]. Этот эксперимент заключался в следующем. С полигона Покер-Флэт (Poker Flat Research Range, 65°07' с. ш., 147°28' з. д.) на Аляске (США) в 6:38 UT 7 ноября 1995 года была запущена

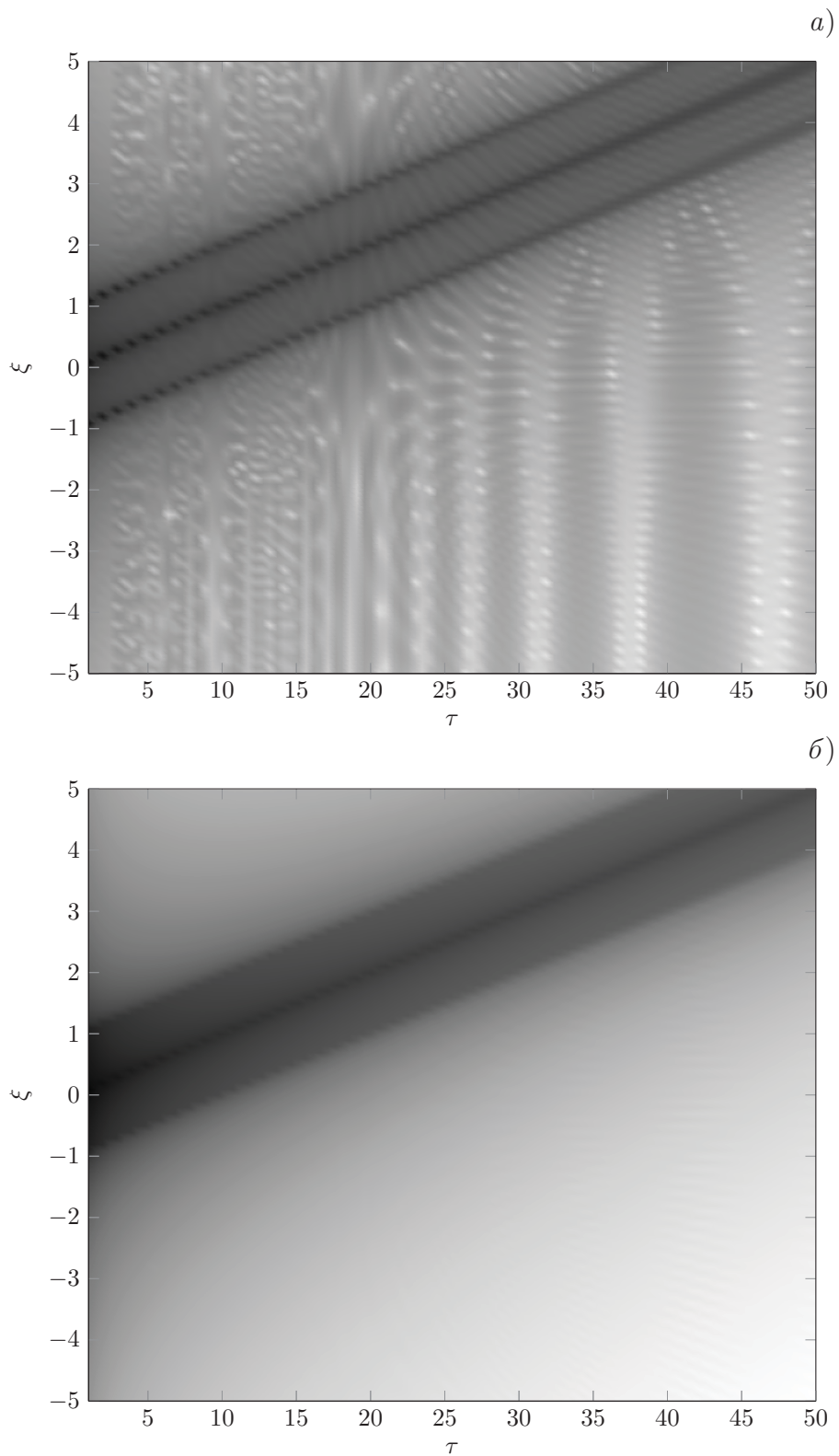


Рис. 11. Пространственная структура электрического (*a*) и магнитного (*б*) полей в случае разрывного распределения заряда на антенне, ориентированной поперёк резонансного направления. Значения полей приведены в логарифмическом масштабе. Белый цвет соответствует минимальному значению, чёрный — максимальному. Для простоты показаны структуры, отвечающие только одному семейству характеристик

ракета. Она достигла апогея (824 км) спустя 8,6 мин после запуска. До достижения апогея происходило разделение ракеты на 2 части, переднюю и заднюю. Эти части были соединены тросом. Примерно через 1,8 мин после достижения апогея трос был обрезан с обоих концов. Ракеты при этом продолжали полёт на расстоянии $L_{\text{sep}} = 1174$ м друг от друга. Воображаемая прямая, соединявшая их, имела наклон около 5° к геомагнитному полю. В рамках этого эксперимента были изучены излучение, распространение и приём волн в достаточно широком диапазоне частот в ионосфере. (В данной работе анализируются результаты эксперимента на частоте 100 кГц, соответствующей нижнегибридному диапазону.) На передней ракете был закреплён радиопередатчик (high frequency exciter, HEX), а на задней — приёмник (receiver for exciter, REX), настроенный на те же частоты, что и передатчик (рис. 12). Оба устройства, HEX и REX, представляли собой два скрещённых под прямым углом противofазных диполя с треугольными распределениями тока и характерными размерами $L_{\text{tr}} = 9,5$ м. Возбуждающий волны ток в антенне HEX имел вид импульсов с длительностью $T = 0,3$ мс. Частоты ω_{pe} и ω_{ce} изменялись в зависимости от времени после запуска ракеты вследствие пространственных изменений концентрации электронов и геомагнитного поля и измерялись бортовой аппаратурой. Например, через 854,49 с после запуска имеем $\omega_{\text{pe}} = 4,21 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$, $\omega_{\text{ce}} = 8,42 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$. Этим частотам соответствует длина электромагнитной волны $\lambda = 124$ м, что на порядок величины меньше расстояния L_{sep} .

Характерные осциллограммы сигнала, зарегистрированного на терминале приёмной антенны REX, приведены на рис. 13 для разных моментов после запуска ракеты. Из этого рисунка видно, что имеют место эффекты аномального расплывания (увеличения длительности) и группового запаздывания (задержки): уже на расстоянии порядка 10λ наблюдалось запаздывание видеоимпульса примерно на $(1 \div 3) \cdot 10^{-4}$ с, а вследствие расплывания его длительность увеличилась примерно в два раза. Как следует из приведённых графиков, импульс имеет тонкую структуру, вид которой зависит от времени после запуска.

Теоретический расчёт временной зависимости электрического поля в рассматриваемой задаче по формуле (65) полностью подтверждает данные эксперимента OEDIPUS-C. Соответствующие графики приведены на рис. 14

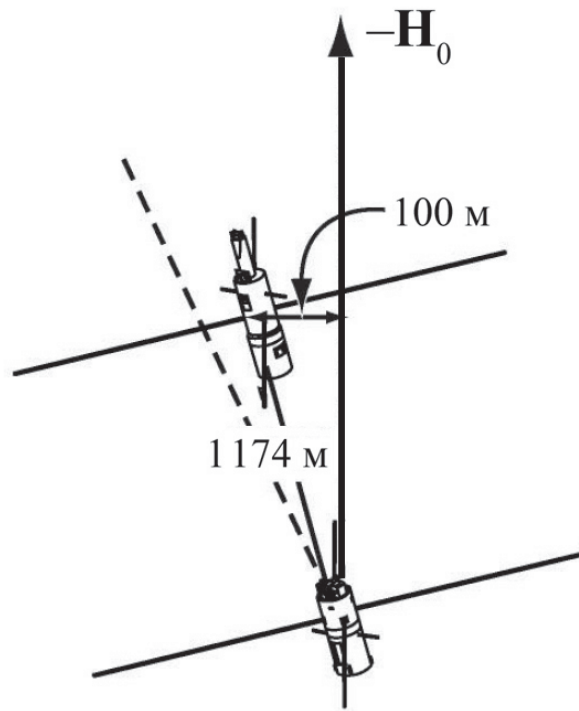


Рис. 12. Условная схема эксперимента OEDIPUS-C. Штриховой линией показан резонансный конус

для различных точек наблюдения вблизи резонансного направления ($|\xi| \ll |\tau|$) при параметрах, соответствующих 854,49 с после запуска ракеты. Видно, что форма импульса заметно искажается и имеют место эффекты аномального расплывания и группового запаздывания. Также этот рисунок демонстрирует роль тепловой, электромагнитной и столкновительной поправок в дисперсионном уравнении. Анализ приведённых временных зависимостей позволяет отметить следующее. Во-первых, учёт столкновений приводит к резкому ослаблению сигнала во времени. Этот эффект усиливается с ростом координаты τ , т. е. по мере удаления от источника вдоль резонансной поверхности. Во-вторых, сравнение форм сигнала при $\xi = 1, \tau = 10^3$ и $\xi = 10, \tau = 10^3$ показывает, что поправка, связанная с возбуждением электромагнитной волны, существенна в удалённой от резонансной поверхности области.

Вернёмся к данным эксперимента OEDIPUS-C. Как видно из рис. 13в, импульс также подвержен «дроблению»: он фактически распадается на два отдельных, более коротких импульса. Этот эффект связан с влиянием приёмной антенны. Обсудим это подробнее, ограничиваясь качественным рассмотрением.

Приёмная антенна в резонансных условиях эффективно переизлучает

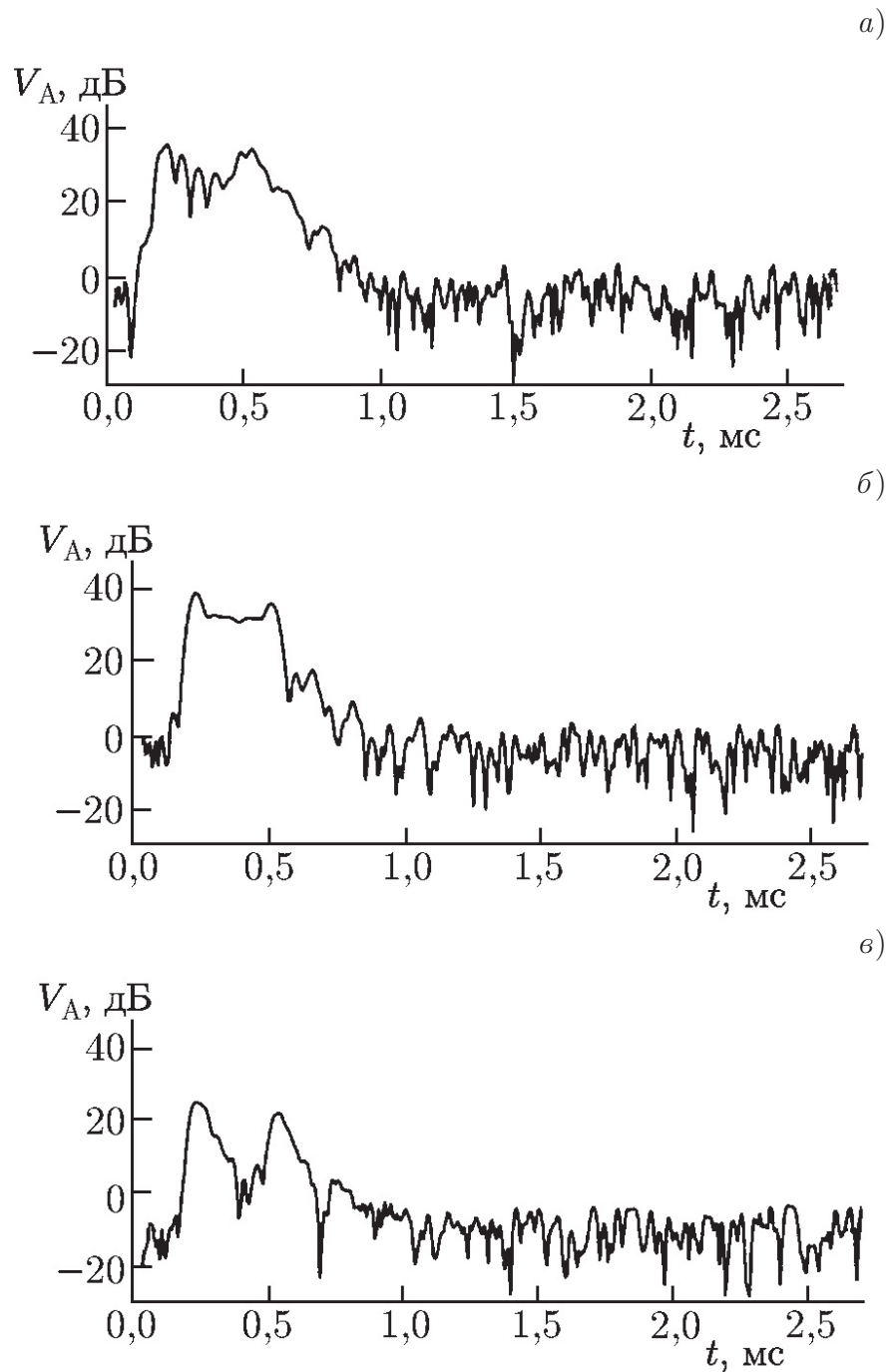


Рис. 13. Экспериментальные данные OEDIPUS-C при разных временах после запуска ракеты: *a* — время после запуска равно 882,99 с, *б* — 916,49 с, *в* — 928,49 с. Величина V_A соответствует напряжению на терминале приёмной антенны REX, измеренному в децибелах относительно напряжения 1 мВ

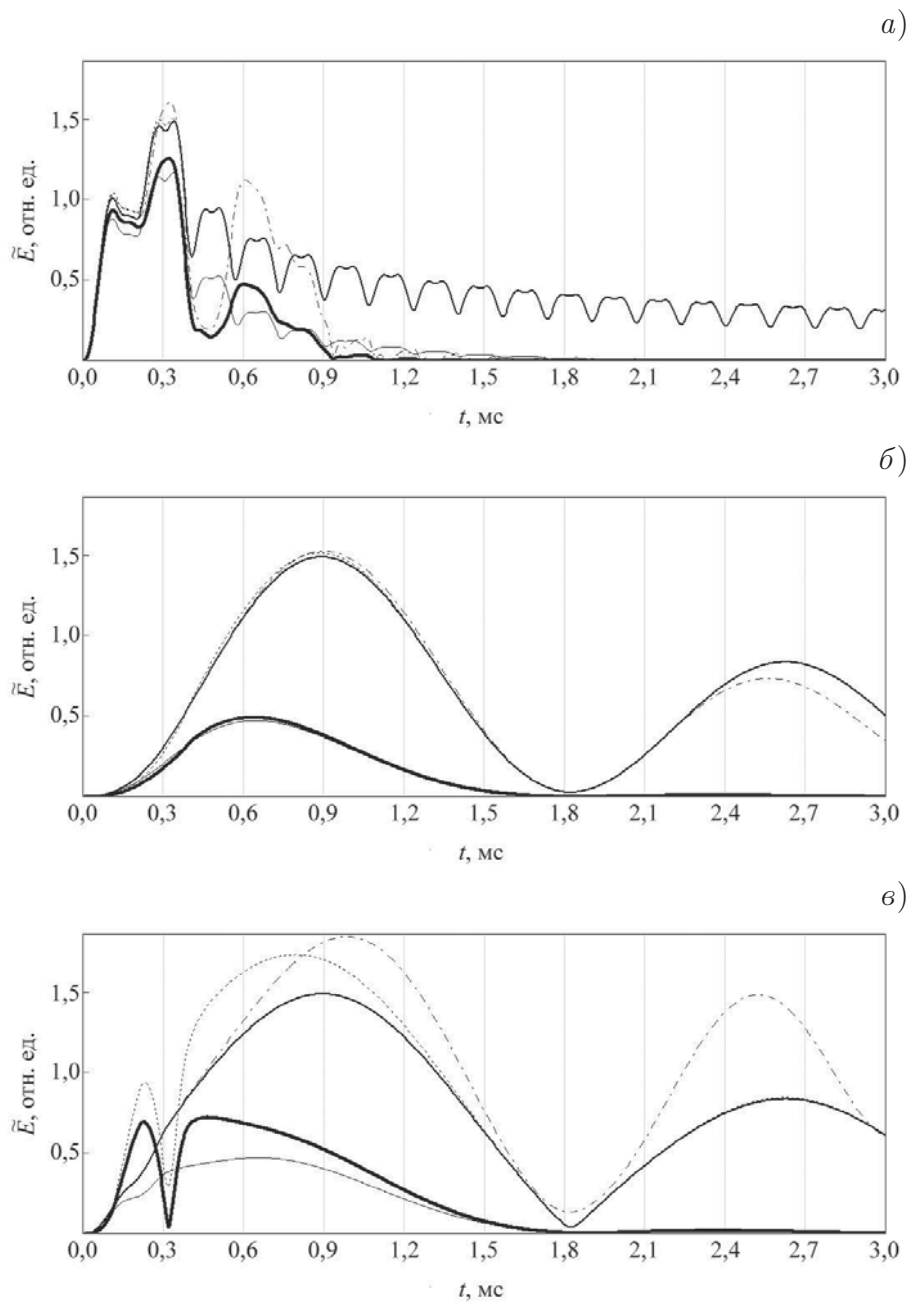


Рис. 14. Временная структура электрического поля в случае разрывного распределения заряда на антенне при $\xi = 1$, $\tau = 10^2$ (а); $\xi = 1$, $\tau = 10^3$ (б); $\xi = 10$, $\tau = 10^3$ (в). Зависимости, показанные сплошными толстыми линиями, рассчитаны с учётом тепловой, электромагнитной и столкновительной поправок; сплошными — без учёта поправок; сплошными тонкими — с учётом столкновительной поправки; пунктирными — с учётом электромагнитной поправки; штрихпунктирными — с учётом тепловой поправки

(рассеивает) падающее квазиэлектростатическое поле, возбуждённое антенной-излучателем. Можно говорить, что в данном случае отклик приёмной антенны является резонансным. Следовательно, для корректного описания напряжения, индуцируемого на терминале приёмной антенны, и нахождения его связи с полем падающей волны необходимо решать задачу рассеяния (дифракции) на антенне. Даже в квазистатическом приближении аналитическое решение этой задачи невозможно, а численные методы требуют значительных вычислительных ресурсов. Можно, однако, обойти эту сложность, если воспользоваться теоремой взаимности, подставив в неё: 1) флуктуации заряда в фоновой плазме и падающее квазиэлектростатическое поле, 2) пробный заряд с прямоугольным распределением вдоль приёмной антенны и возбуждаемое им поле. На рис. 15 приведены теоретические и экспериментальные частотные зависимости квадрата модуля спектральной компоненты напряжения на терминале приёмной антенны REX. Отметим наличие ярко выраженного узкого спектрального максимума на несущей частоте на рис. 15а. Это как раз и соответствует значительному уширению прямоугольного квазимонохроматического сигнала, аналогичному рис. 13а и б. Видно, что теоретическая и экспериментальная кривые близки в окрестности спектрального максимума. Ход экспериментальных кривых на боковых частотах определяется в первую очередь шумами в плазме и не может быть объяснён теоретически в рамках настоящего рассмотрения. Рисунок 15б соответствует сильной структуризации импульса, аналогичной рис. 13в. Она происходит из-за того, что основная частота практически не возбуждается, а более высокие частоты, соответствующие переднему и заднему фронтам импульсов, напротив, возбуждаются значительно сильнее из-за смещения ракеты с приёмником REX относительно резонансного конуса, опирающегося на излучатель HEX и рассчитанного для несущей частоты. Как и в предыдущем случае, обе кривые близки в окрестности спектрального максимума.

Важно отметить, что структура поля излучения, задаваемая распределением заряда с особенностями вдоль антенного провода, весьма сложна. Поэтому задачу о групповом запаздывании и аномальном расплывании удобно анализировать на классе гладких функций. Рассмотрим дипольный источник

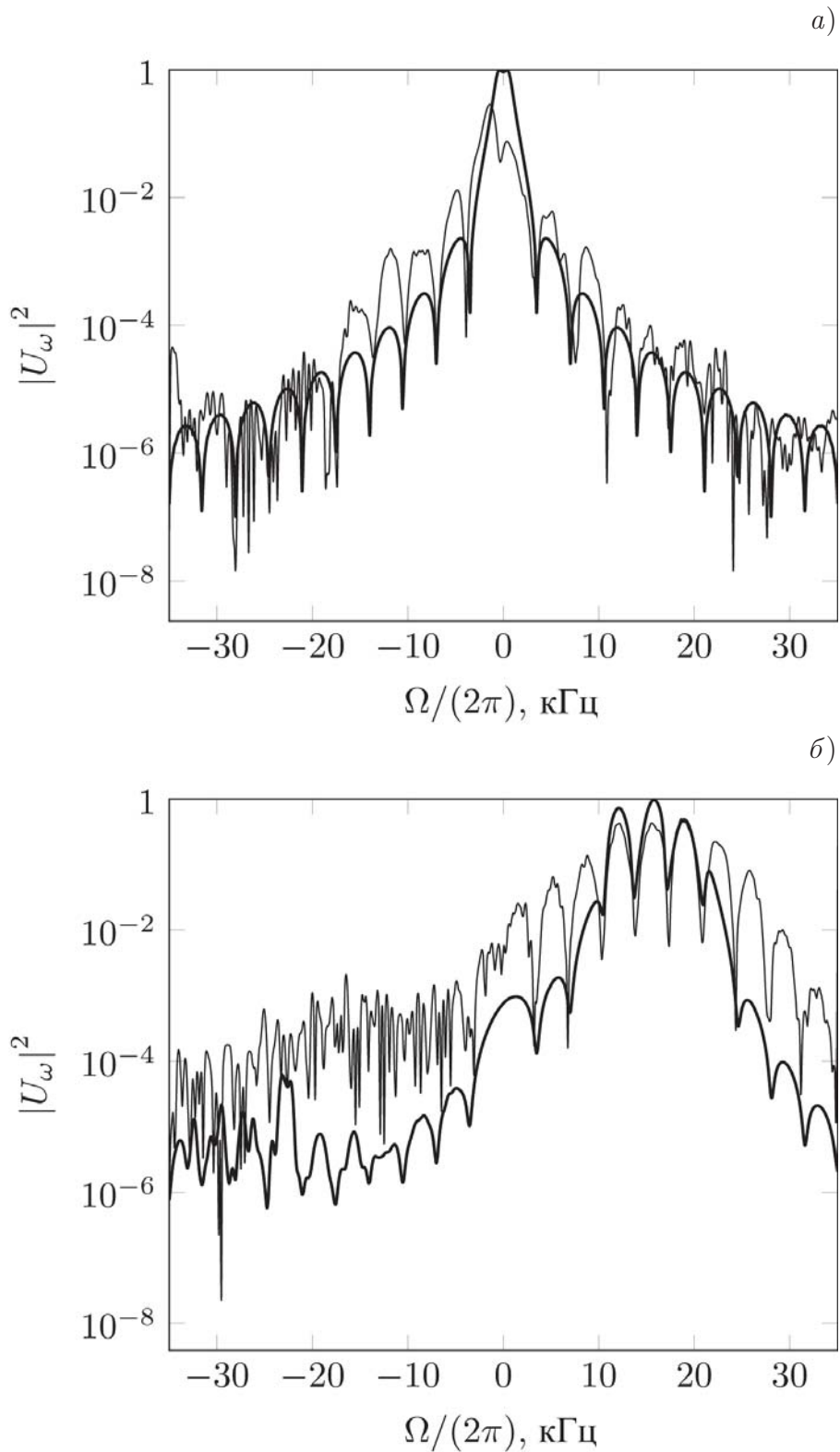


Рис. 15. Зависимость квадрата модуля спектральной компоненты напряжения на терминале приёмной антенны в безразмерных единицах от частоты $\Omega = \omega - \omega_0$. Толстая линия соответствует аналитической зависимости, тонкая — экспериментальным данным. Безразмерные единицы выбраны так, что функция, соответствующая теоретической зависимости, равна единице в точке своего глобального максимума. Панель *a* — реализация спустя 895,49 с после запуска ракет, *б* — спустя 922,49 с

вида

$$\rho_{\text{ext}}(\tau, y, \xi) = \frac{1}{2iL} \left[\frac{1}{(\xi + i)^2} - \frac{1}{(\xi - i)^2} \right] \delta(\tau) \delta(y), \quad (67)$$

где $\delta(y)$ — дельта-функция Дирака. В пренебрежении электромагнитной и дисперсионной поправками интегралы $I_E(\bar{\beta})$ и $I_\Phi(\bar{\beta})$, определяющие структуру электрического и магнитного полей, в этом случае равны [78]

$$I_E(\bar{\beta}) = \frac{\pi}{iL^2} \frac{\gamma[3/2, -i\bar{\beta}(\xi + i + is\tau)]}{[-i(\xi + i + is\tau)]^{3/2}}, \quad (68)$$

$$I_\Phi(\bar{\beta}) = \frac{\pi}{iL^2} \frac{\gamma[1/2, -i\bar{\beta}(\xi + i + is\tau)]}{[-i(\xi + i + is\tau)]^{1/2}}. \quad (69)$$

Если же учесть дисперсионную и/или электромагнитную поправки, то соответствующие интегралы аналитически не берутся и приходится применять численные методы. На рис. 16 и 17 показаны рассчитанные по полученным формулам (68) и (69) пространственно-временные распределения электромагнитного поля при параметрах, отвечающих времени 854,49 с после запуска ракеты, и $t = T/2$ (излучающий диполь ориентирован поперёк резонансного направления). Отметим следующее. Во-первых, поля излучения имеют максимум на резонансной поверхности, которая исходит из начала координат. Последнее обусловлено не какими-либо особенностями в распределении заряда вдоль провода (здесь они просто отсутствуют), а симметрией системы относительно начала координат. Во-вторых, поля спадают медленнее, чем в случае разрывного распределения, в обоих направлениях, ξ и τ . В-третьих, видно, что на расстояниях порядка десяти длин волн наблюдается групповое запаздывание сигнала примерно на $10^{-5} \div 10^{-4}$ с и имеет место аномальное расплывание: вблизи резонансного направления вдали от источника на расстоянии порядка сотни длин волн сигнал расплывается более чем в $3 \div 4$ раза. Наконец, как и в случае разрывного распределения заряда, важна столкновительная поправка.

Своеобразная пространственная локализация поля в условиях резонанса и сравнительно простая исходная форма импульса сигнала позволяют выделить класс пространственно-временных структур потенциала, которые являются автомодельными в широком смысле слова. С этой целью перейдём от интегрального описания к дифференциальному. Нетрудно убедиться, что функция

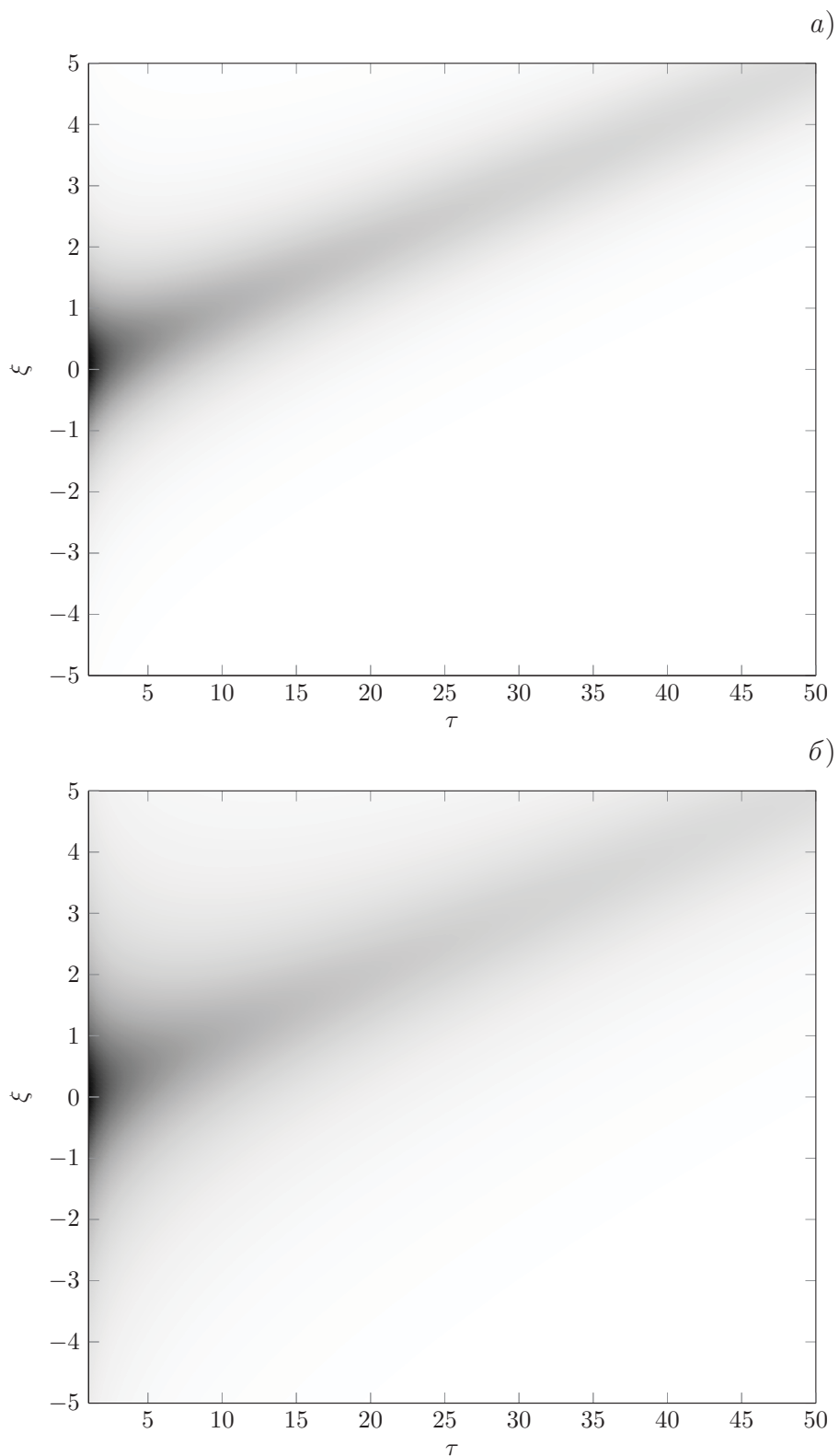


Рис. 16. Пространственная структура электрического (*a*) и магнитного (*б*) полей в случае гладкого распределения заряда на антенне. Белый цвет соответствует минимальному значению, чёрный — максимальному

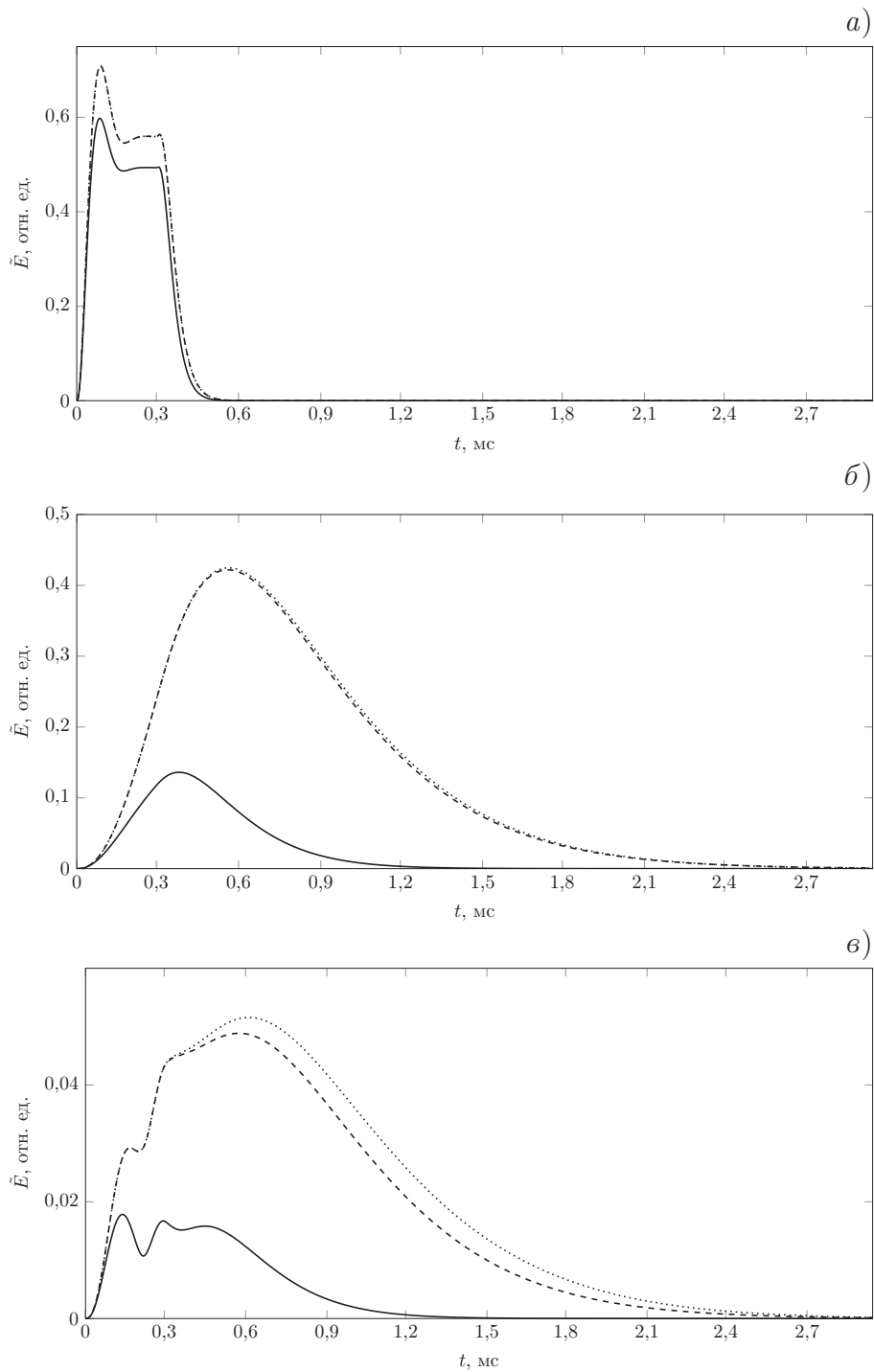


Рис. 17. Временная структура электрического поля, создаваемая гладким распределением заряда вдоль антенны, при $\xi = 1$, $\tau = 10^2$ (а); $\xi = 1$, $\tau = 10^3$ (б); $\xi = 10$, $\tau = 10^3$ (в). Зависимости, показанные сплошными линиями, рассчитаны с учётом столкновительной поправки; штриховыми — электромагнитной; пунктирными — тепловой. На панели а штриховая и пунктирная линии совпадают

$\tilde{\Phi}(\tau, \xi, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка в частных производных вида

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tau} = iq \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial t \partial \xi} + is \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \xi}, \quad (70)$$

если в дисперсионном уравнении пренебречь тепловой и электромагнитной поправками. Класс решений полученного дифференциального уравнения будем искать в виде

$$\tilde{\Phi}(\tau, \xi, t) = C_{1\chi} \left(\frac{t}{q\tau} \right)^\chi f(\bar{Y}), \quad (71)$$

где $C_{1\chi}$ — произвольная постоянная, $\bar{Y} \equiv i(\xi + i + is\tau)t/(q\tau)$ — «автомодельная» переменная, χ — некоторое число. Подставляя в уравнение (70) функцию $\tilde{\Phi}(\tau, \xi, t)$ в таком виде, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению, описывающему допустимое множество функций $f(\bar{Y})$:

$$\bar{Y} f'' + (\chi + 1 - \bar{Y}) f' - \chi f = 0. \quad (72)$$

Это уравнение имеет два линейно независимых решения. Первое решение — это вырожденная гипергеометрическая функция $\Phi(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}; \bar{Y})$ с параметрами $\bar{\alpha} = \chi$ и $\bar{\gamma} = \chi + 1$. Второе решение имеет особенность в точке $\bar{Y} = 0$ и по этой причине не рассматривается. Следовательно,

$$f(\bar{Y}) = C_{2\chi} \Phi(\chi, \chi + 1; \bar{Y}), \quad (73)$$

где $C_{2\chi}$ — некоторая постоянная. Покажем, что найденный класс функций содержит в себе найденное ранее решение (69). Для этого используем связь вырожденной гипергеометрической функции и неполной гамма-функции:

$$\gamma(\chi, \bar{Y}) = \frac{\bar{Y}^\chi}{\chi} \Phi(\chi, \chi + 1; \bar{Y}).$$

Сопоставляя это выражение с найденным ранее решением (69), заключаем, что при $\chi = 3/2$ указанные выражения совпадают.

Найденному классу распределений потенциала соответствует класс рас-

пределений заряда на антенне

$$\rho_{\text{ext}}(\xi, \tau, y) = C_{3\chi} \left[\frac{1}{(1 + i\xi)^{\chi+1/2}} + \frac{(-1)^{\chi-1/2}}{(1 - i\xi)^{\chi+1/2}} \right] \delta(\tau) \delta(y), \quad (74)$$

где $C_{3\chi}$ — некоторая постоянная. Видно, что полученное выражение при заданном χ описывает симметричное (нечётное по переменной ξ) дипольное распределение, если $(\chi + 1/2)$ — чётное число ($\chi = 3/2, 7/2, 11/2, 15/2, \dots$).

На рис. 18 приведены найденные «автомодельные» распределения $f(\bar{Y})$ и $\rho_{\text{ext}}(\xi)$ при $\chi = 3/2, 7/2, 11/2$.

Выше были рассмотрены резонансные структуры полей, создаваемых различными видами распределений заряда на антенне, разрывными и гладкими. Покажем, что гладкость распределения заряда на антенне определяет скорость убывания потенциала в зависимости от времени. В самом деле, при временах $t \gg T$ потенциал, как следует из соотношения (59), можно приближённо записать в виде

$$\tilde{\Phi}(\tau, \xi, t) = \frac{\pi T}{iq\tau^{3/2}} e^{-i\omega_0 t} \left(\frac{\partial I_{\Phi}}{\partial \bar{\beta}} \right) \Big|_{\bar{\beta}=t/(q\tau)}.$$

Дифференцируя, получаем

$$\tilde{\Phi}(\tau, \xi, t) = \frac{\pi T \sqrt{q}}{i\tau \sqrt{t}} e^{-i\omega_0 t} \rho_{\text{ext}} \left(0, 0, \frac{t}{q\tau} \right) \exp \left[i\Psi \left(\frac{t}{q\tau} \right) \right].$$

Отсюда видно, что скорость убывания потенциала как функции времени определяется видом спектра заряда на антенне. Поскольку спектр разрывных функций более богатый, чем спектр гладких функций, можно заключить, что в данной точке пространства поле, созданное гладким распределением заряда на антенне, спадает быстрее, чем поле, созданное разрывным распределением заряда.

1.4. Возбуждение и распространение прямоугольного импульса в плазменном волноводе

В настоящем разделе рассматривается возбуждение и распространение квазиэлектростатических волн в плазменном волноводе в магнитном поле:

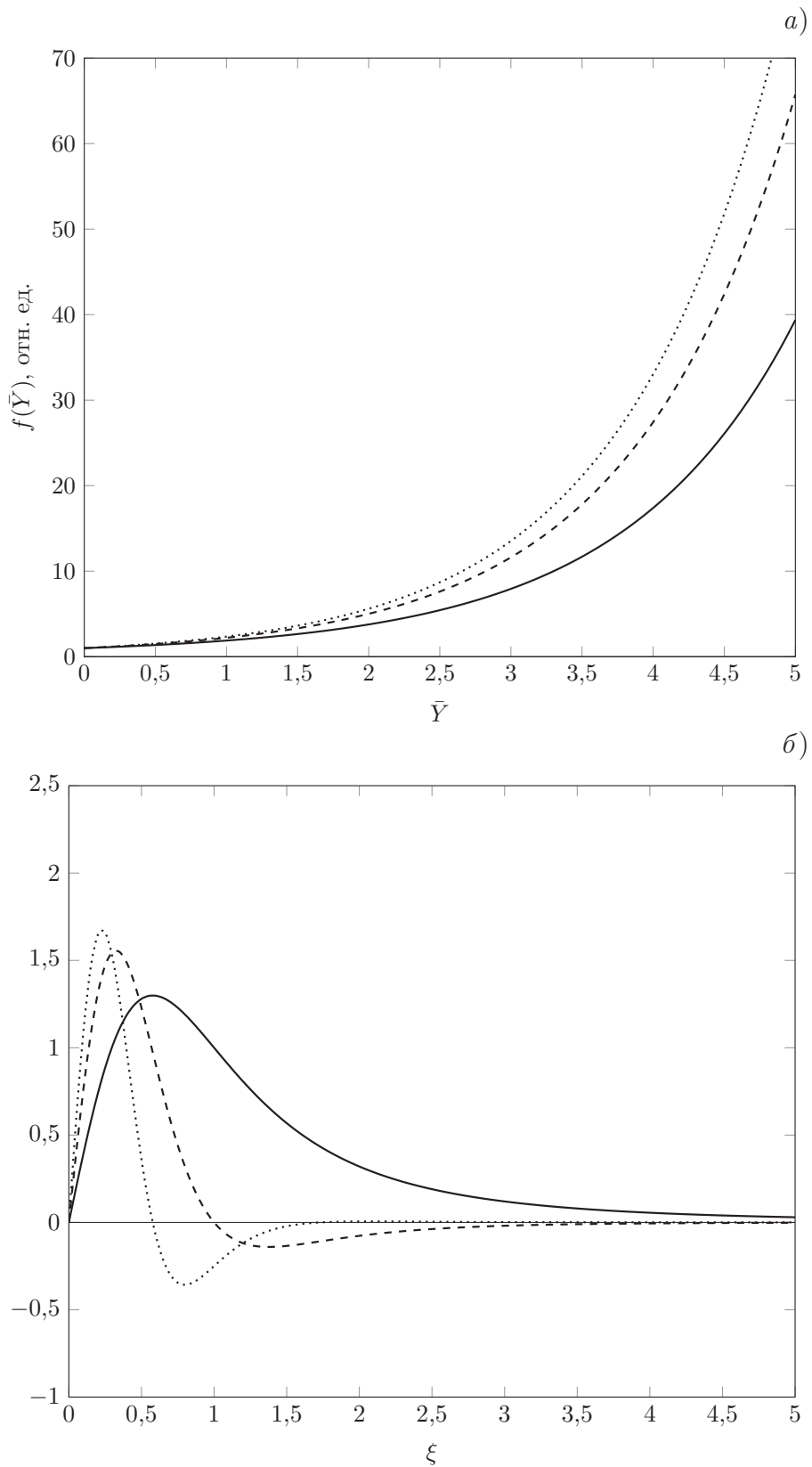


Рис. 18. Панель *a* — «автомодельная» зависимость $f(\bar{Y})$, *б* — распределение заряда вдоль провода: сплошные линии соответствуют параметру $\chi = 3/2$, штриховые $\chi = 7/2$, пунктирные $\chi = 11/2$

решается задача о собственных модах такого волновода, анализируется их возбуждение дипольным источником и рассматривается нестационарный режим, соответствующий возбуждению и распространению прямоугольного импульса в волноводе.

Дисперсионные соотношения и выражения для полей собственных мод плазменных волноводов в общем случае весьма громоздки [11]. Поэтому в рассматриваемой ситуации гораздо проще найти эти моды напрямую в приближении квазистатики. Рассмотрим однородный плазменный волновод (канал) в виде бесконечно длинного цилиндра с радиусом a , окружённый однородной фоновой плазмой (рис. 19). Внешнее однородное постоянное магнитное поле с напряжённостью \mathbf{H}_0 направлено вдоль оси цилиндра, а концентрация плазмы канала N_1 больше концентрации фоновой плазмы N_2 . Введём цилиндрическую систему координат (ρ, φ, z) , где координата ρ отсчитывается от оси цилиндра в поперечном направлении, φ — азимутальный угол, а ось z совпадает с осью цилиндра и направлена вдоль внешнего магнитного поля. При дальнейшем анализе возбуждения и распространения квазипотенциальных волн в таком волноводе будем считать, что в плазме канала (т. е. при $\rho \leq a$) реализуются резонансные условия, соответствующие нижнегибридному диапазону частот. Это означает, что в плазме канала поперечная компонента ε_1 тензора диэлектрической проницаемости положительна, а продольная компонента η_1 отрицательна. Также будем полагать, что в фоновой плазме (т. е. при $\rho > a$) резонансные условия не реализуются: в ней поперечная ε_2 и продольная η_2 компоненты тензора диэлектрической проницаемости положительны.

В области $\rho \leq a$, т. е. в канале, уравнение (12), записанное для собственных мод, имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{\mu_1^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (75)$$

где $\mu_1 = \sqrt{|\varepsilon_1/\eta_1|} > 0$. Подчеркнём, что в условиях резонанса это уравнение относится к гиперболическому типу. В области $\rho > a$, в фоновой плазме, уравнение (12) относится к эллиптическому типу и имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\mu_2^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (76)$$

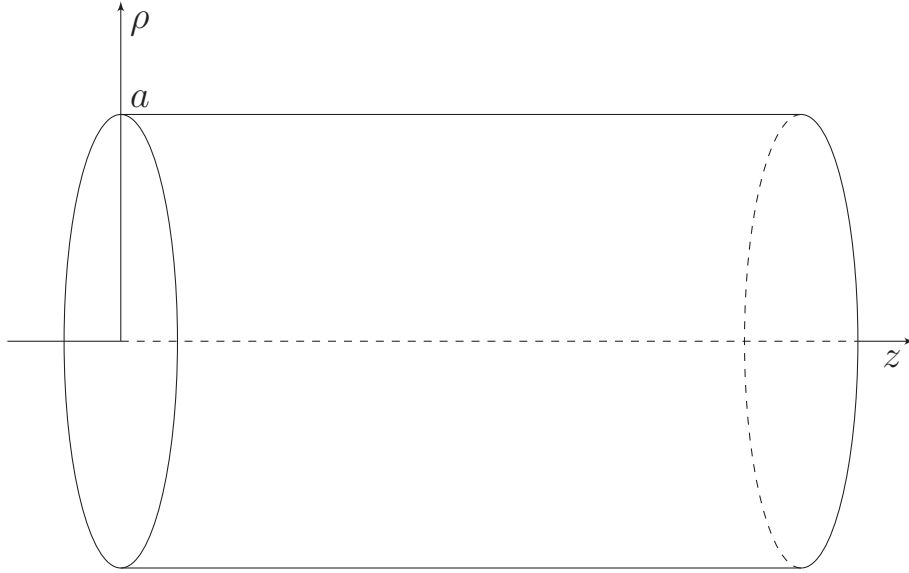


Рис. 19. Плазменный волновод в форме бесконечно длинного цилиндра, вытянутый вдоль магнитного поля

где $\mu_2 = \sqrt{\varepsilon_2/\eta_2}$.

Ограничиваясь модами с азимутальной симметрией ($\partial\Phi/\partial\varphi \equiv 0$), находим

$$\Phi(\rho, z, h) = \begin{cases} a_1(h) J_0\left(\frac{\rho h}{\mu_1}\right) \exp(ihz), & \rho \leq a, \\ a_2(h) K_0\left(\frac{\rho h}{\mu_2}\right) \exp(ihz), & \rho > a, \end{cases} \quad (77)$$

где $J_0(\rho h/\mu_1)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка, $K_0(\rho h/\mu_2)$ — функция Макдональда нулевого порядка, h — продольное волновое число, $a_1(h)$ и $a_2(h)$ — пока произвольные постоянные. В выражении (77) учтены только те моды, поля которых конечны при $\rho = 0$ и экспоненциально спадают при $\rho \rightarrow +\infty$. Также отметим, что здесь и далее рассматриваются моды, распространяющиеся в направлении оси z , т. е. $h > 0$.

Из равенства (10) находим компоненты комплексной амплитуды напряжённости электрического поля:

$$E_\rho(\rho, z, h) = \begin{cases} a_1(h) \frac{h}{\mu_1} J_1\left(\frac{\rho h}{\mu_1}\right) \exp(ihz), & \rho \leq a, \\ a_2(h) \frac{h}{\mu_2} K_1\left(\frac{\rho h}{\mu_2}\right) \exp(ihz), & \rho > a, \end{cases} \quad (78)$$

$$E_\varphi(\rho, z, h) \equiv 0, \quad (79)$$

$$E_z(\rho, z, h) = \begin{cases} -iha_1(h) J_0\left(\frac{\rho h}{\mu_1}\right) \exp(ihz), & \rho \leq a, \\ -iha_2(h) K_0\left(\frac{\rho h}{\mu_2}\right) \exp(ihz), & \rho > a. \end{cases} \quad (80)$$

Здесь $J_1(\rho h/\mu_1)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка, $K_1(\rho h/\mu_2)$ — функция Макдональда первого порядка.

Условия непрерывности комплексных амплитуд потенциала и нормальной компоненты D_ρ индукции электрического поля $\mathbf{D} = \hat{\varepsilon}\mathbf{E}$ при $\rho = a$ позволяют получить дисперсионное уравнение [79]

$$y_1(h) = y_2(h), \quad (81)$$

где

$$y_1(h) = \frac{\varepsilon_1 J_1(ah/\mu_1)}{\mu_1 J_0(ah/\mu_1)}, \quad y_2(h) = \frac{\varepsilon_2 K_1(ah/\mu_2)}{\mu_2 K_0(ah/\mu_2)},$$

а также связь между величинами $a_1(h)$ и $a_2(h)$:

$$a_2(h) = a_1(h) \frac{J_0(ah/\mu_1)}{K_0(ah/\mu_2)}. \quad (82)$$

Отметим, что в данном случае условие непрерывности комплексной амплитуды потенциала при $\rho = a$ совпадает с условием непрерывности тангенциальной компоненты E_z .

Численный анализ дисперсионного уравнения (81) показывает, что оно имеет бесконечный дискретный набор положительных корней h_n , где n — натуральное число. Графики функций $y_1(ah)$ и $y_2(ah)$, иллюстрирующие это, приведены на рис. 20. При построении графиков использовались следующие параметры: $N_1 = 1,0 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}$, $N_2 = 2,4 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}$, $a = 25,6 \text{ м}$, $H_0 = 0,5 \text{ Э}$, $\omega_0 = 4,3 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$.

Для расчёта потока энергии необходимо найти компоненту H_φ комплексной амплитуды напряжённости магнитного поля \mathbf{H} собственных мод. Соответствующий векторный потенциал удовлетворяет уравнению (13), в котором надо

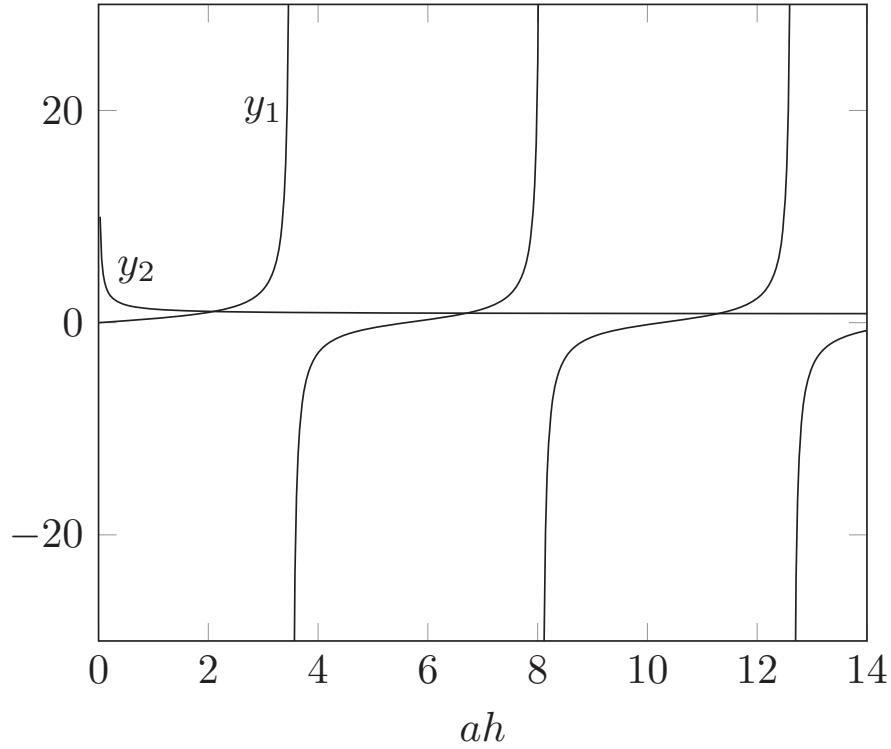


Рис. 20. Численное решение дисперсионного уравнения (81)

положить $\mathbf{j}_{\text{ext}} = 0$. Решение этого уравнения имеет вид

$$\mathbf{A}(\rho, z, h) = -\frac{ik_0}{4\pi} \times \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\varepsilon} \mathbf{E}(\rho', z', h)}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2}} \rho' d\rho' d\varphi' dz'. \quad (83)$$

В полученном выражении удобно в первую очередь проинтегрировать по z' :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(ihz') dz'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2}} = \\ = 2 \exp(ihz) K_0 \left(\sqrt{h^2 \rho^2 + h^2 \rho'^2 - 2h^2 \rho \rho' \cos(\varphi - \varphi')} \right).$$

Интегрирование по φ' проводится с использованием частного случая теоремы сложения Неймана [80]:

$$K_0 \left(\sqrt{h^2 \rho^2 + h^2 \rho'^2 - 2h^2 \rho \rho' \cos(\varphi - \varphi')} \right) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} K_m(\check{z}) I_m(\check{z}) \cos[m(\varphi - \varphi')],$$

а также ортогональности функций $\cos(m\varphi)$ и $\cos(n\varphi)$. Здесь m и n — целые числа, $\check{Z} = \max(h\rho, h\rho')$, $\check{z} = \min(h\rho, h\rho')$, $K_m(\check{Z})$ и $I_m(\check{z})$ — функции Макдональда и Инфельда m -го порядка соответственно. В результате получаем

$$\int_0^{2\pi} K_0\left(\sqrt{h^2\rho^2 + h^2\rho'^2 - 2h^2\rho\rho'\cos(\varphi - \varphi')}\right) d\varphi' = 2\pi K_0(\check{Z}) I_0(\check{z}).$$

Оставшиеся однократные интегралы по ρ' в соотношении (83) не сводятся к конечной комбинации элементарных и цилиндрических функций. Окончательно получаем

$$A_\rho(\rho, z, h) = -\frac{ik_0}{h} \exp(ihz) \times \left[K_0(\rho h) \int_0^{\rho h} I_0(x) F_1(x) x dx + I_0(\rho h) \int_{\rho h}^{+\infty} K_0(x) F_1(x) x dx \right], \quad (84)$$

$$A_z(\rho, z, h) = -\frac{k_0}{h} \exp(ihz) \times \left[K_0(\rho h) \int_0^{\rho h} I_0(x) F_2(x) x dx + I_0(\rho h) \int_{\rho h}^{+\infty} K_0(x) F_2(x) x dx \right], \quad (85)$$

где

$$F_1(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_1}{\mu_1} a_1(h) J_1(x/\mu_1), & x \leq ah, \\ \frac{\varepsilon_2}{\mu_2} a_2(h) K_1(x/\mu_2), & x > ah, \end{cases}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} \eta_1 a_1(h) J_0(x/\mu_1), & x \leq ah, \\ \eta_2 a_2(h) K_0(x/\mu_2), & x > ah. \end{cases}$$

Тогда для компоненты $H_\varphi \equiv (\partial A_\rho / \partial z) - (\partial A_z / \partial \rho)$ находим

$$H_\varphi(\rho, z, h) = k_0 \left[K_0(\rho h) \int_0^{\rho h} F_1(x) I_0(x) x dx + I_0(\rho h) \int_{\rho h}^{+\infty} F_1(x) K_0(x) x dx - \right. \\ \left. - K_1(\rho h) \int_0^{\rho h} F_2(x) I_0(x) x dx + I_1(\rho h) \int_{\rho h}^{+\infty} F_2(x) K_0(x) x dx \right] \exp(ihz). \quad (86)$$

Некоторые интегралы в выражении (86) выражаются через конечную комбинацию цилиндрических и элементарных функций, тем не менее соответствующие выражения здесь не приводим ввиду их громоздкости.

На рис. 21 приведены графики зависимости компонент полей E_z и D_ρ от координаты ρ для нескольких мод. При построении этих графиков использовались те же параметры, что и при анализе дисперсионного уравнения. Видно, что поля собственных мод локализованы внутри волновода и спадают при удалении от него в поперечном направлении. Число укладывающихся вдоль радиуса волновода пространственных периодов электрического поля определяет номер моды.

Рассмотрим теперь задачу о возбуждении плазменного волновода сторонним монохроматическим источником. Удобно рассмотреть диполь, состоящий из двух равномерно заряженных колец с радиусом a , плоскости которых параллельны друг другу, перпендикулярны оси волновода и отстоят на расстояние b друг от друга, а центры колец лежат на оси волновода (рис. 22). Соответствующее распределение комплексной амплитуды объёмной плотности заряда ϱ имеет вид

$$\varrho(\rho, z) = \frac{Q}{2\pi a} \delta(\rho - a) [\delta(z) - \delta(z + b)], \quad (87)$$

где Q — амплитуда заряда на кольце.

Поле, возбуждаемое источником вида (87), в канале обращается в бесконечность на особых характеристиках гиперболического уравнения (75). (Под особыми характеристиками здесь и далее понимаются такие характеристики, которые исходят из источника — колец — и идут под углом $\arctg \mu_1$ ко внешнему магнитному полю внутри волновода, а на границе с фоновой плазмой

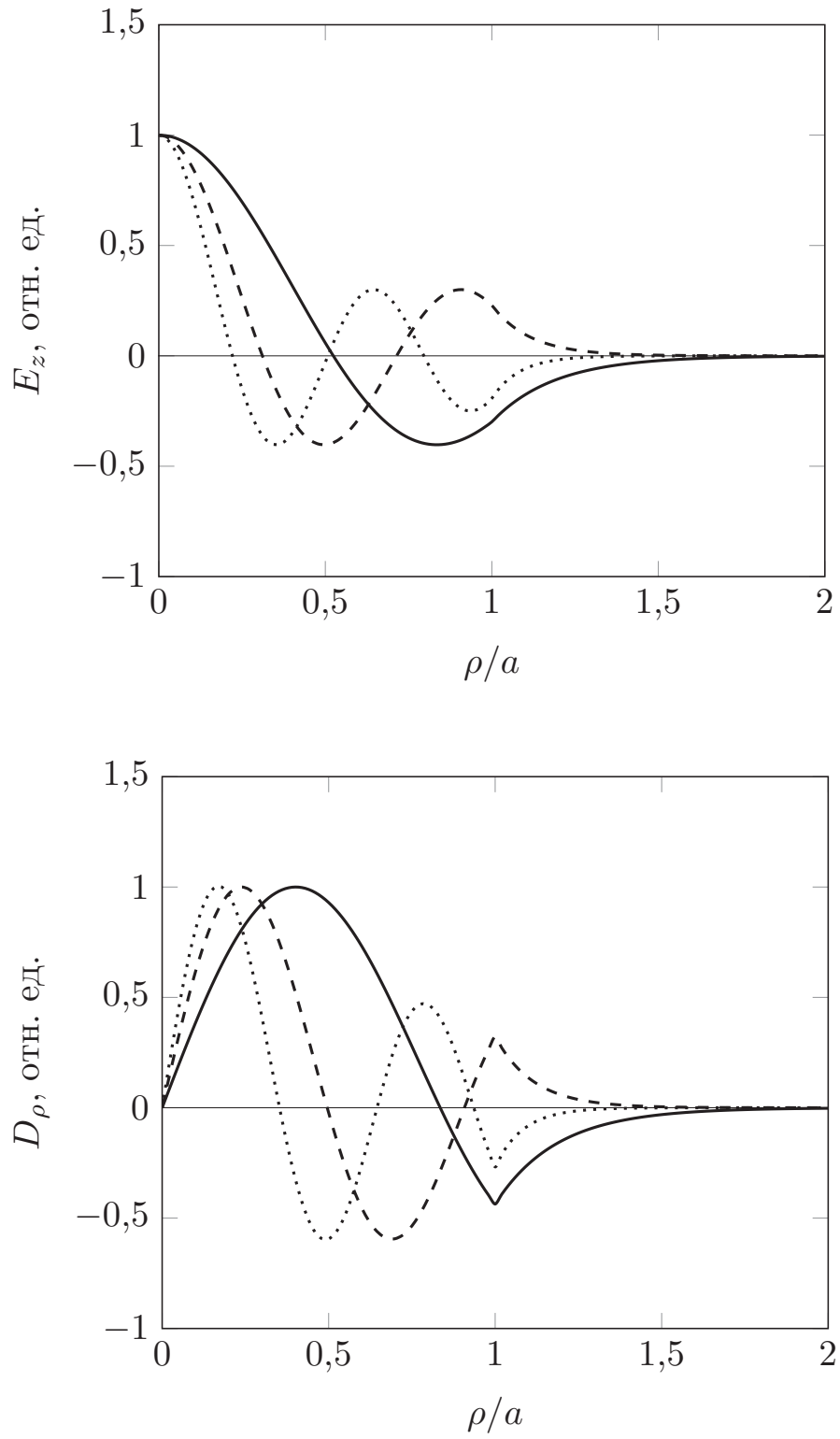


Рис. 21. Собственные моды плазменного волновода

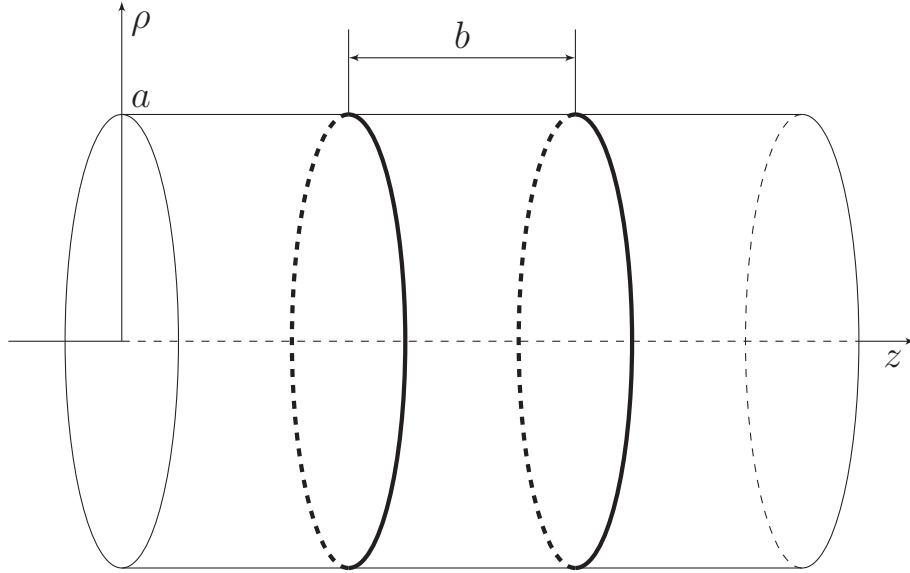


Рис. 22. Сторонний источник в виде двух заряженных колец

испытывают излом.) Поэтому будем предполагать, что в плазме имеют место слабые столкновительные потери, которые снимают указанную сингулярность и не слишком сильно искажают структуру найденных собственных мод. Тогда комплексные амплитуды напряжённостей электрического $\mathbf{E}(\rho, z)$ и магнитного $\mathbf{H}(\rho, z)$ полей излучения в свободной от источников области $z > 0$ можно искать в виде

$$\mathbf{E}(\rho, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \mathbf{E}_n(\rho, z) \exp(-szh_n), \quad (88)$$

$$\mathbf{H}(\rho, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \mathbf{H}_n(\rho, z) \exp(-szh_n), \quad (89)$$

где $\mathbf{E}_n(\rho, z)$ и $\mathbf{H}_n(\rho, z)$ — комплексные амплитуды напряжённостей электрического и магнитного полей собственных мод соответственно, $s = \nu_e/\omega_0$, ν_e — эффективная частота столкновений электронов с ионами и нейтральными молекулами,

$$C_n = \frac{1}{4P_n} \iiint \mathbf{j} \bar{\mathbf{E}}_n dV \quad (90)$$

— коэффициенты разложения [81]. Здесь интегрирование ведётся по области, занятой источником (током), \mathbf{j} — комплексная амплитуда плотности стороннего тока, величина $\bar{\mathbf{E}}_n$ обозначает напряжённость электрического поля n -й моды,

бегущей против оси z , а P_n — средняя за период мощность, переносимая n -й модой в направлении оси z . Отметим, что в условиях слабой ионизации плазмы основной вклад в частоту столкновений ν_e дают столкновения электронов с нейтральными молекулами. После интегрирования с применением уравнения непрерывности соотношение (90) принимает вид

$$C_n = a_1(h_n) \frac{i\omega_0 Q}{4P_n} J_0\left(\frac{ah_n}{\mu_1}\right) [1 - \exp(ih_n b)]. \quad (91)$$

Отметим, что в разложениях (88) и (89), вообще говоря, следует учитывать не только моды дискретной части спектра, но и моды непрерывной части спектра [11]. Последние характеризуются электрическим полем, которое не спадает экспоненциальным образом при $\rho \rightarrow +\infty$. Однако расчёты показывают [82], что в рассматриваемом случае возбуждения квазипотенциальных волн в канале с плазмой, где выполняются резонансные условия, основной вклад в поле излучения дают моды дискретной части спектра.

На рис. 23 показано пространственное распределение величины $|\mathbf{E}(\rho, z)|$, отвечающее возбуждению волновода источником вида (87). В расчёте использовались те же параметры, что и при анализе дисперсионного уравнения; $s = 2,7 \cdot 10^{-3}$, $b = a$. Видно, что поле излучения локализовано на особых характеристиках. В окрестностях точек пересечения особых характеристик, особенно на оси волновода, величина $|\mathbf{E}|$ принимает максимальные значения.

Получим дифференциальное уравнение, описывающее изменение поля \mathbf{E} в окрестности особой характеристики. Для этого перейдём в систему координат (τ, ξ) согласно равенствам

$$\begin{aligned} z &= \tau \cos \sigma_0 + \xi \sin \sigma_0, \\ \rho &= -\tau \sin \sigma_0 + \xi \cos \sigma_0 + a, \end{aligned}$$

где $\sigma_0 = \arctg \mu_1$. При этом ось τ является особой характеристикой уравнения (75), исходящей из точки на кольце с координатами $(\tau = 0, \xi = 0)$. Учитывая, что $|\partial\Phi/\partial\xi| \gg |\partial\Phi/\partial\tau|$, и пренебрегая слагаемыми, не содержащими

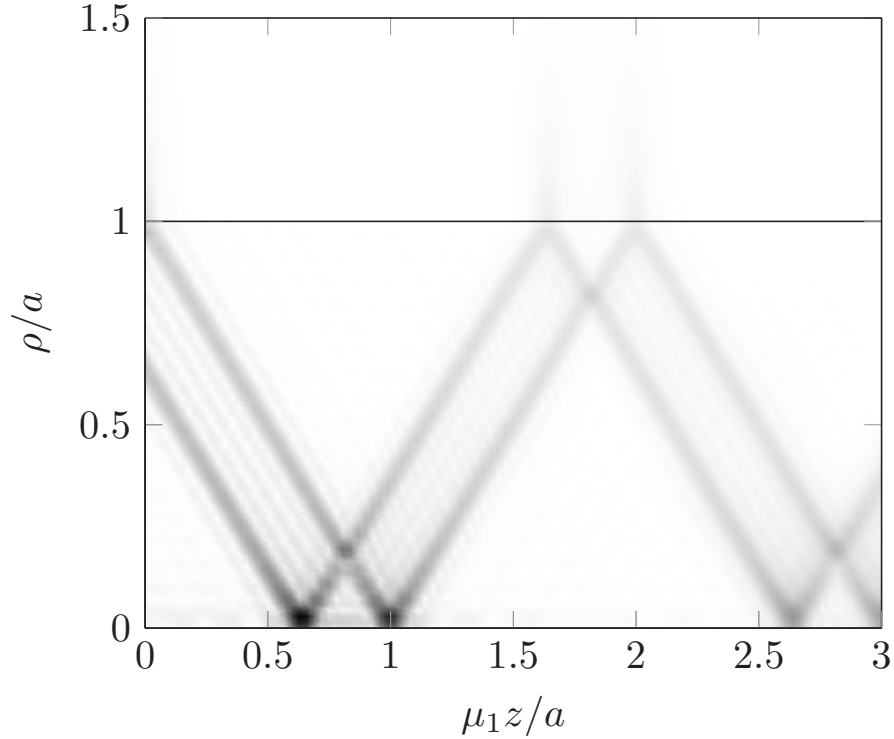


Рис. 23. Пространственное распределение $|\mathbf{E}(\rho, z)|$ в волноводе, который возбуждается диполем, состоящим из двух колец. Чёрный цвет соответствует максимальному значению $|\mathbf{E}(\rho, z)|$, а белый — минимальному. Сплошная линия $\rho = a$ соответствует границе волновода

$\partial\Phi/\partial\xi$, перепишем уравнение (75) в новых координатах в укороченном виде:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\partial\tau} + \frac{\mu_1}{2\left(\tau\mu_1 + \xi + \frac{a}{\cos\sigma_0}\right)} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = 0. \quad (92)$$

В рассматриваемой ситуации в поле \mathbf{E} вносит основной вклад компонента $E_\xi \equiv -\partial\Phi/\partial\xi$, и тогда из (92) интегрированием получаем:

$$E_\xi(\xi, \tau) = E_0(\xi) \left(1 + \frac{\mu_1\tau}{\xi + \frac{a}{\cos\sigma_0}} \right)^{-1/2}, \quad (93)$$

где $E_0(\xi)$ — заданная величина поля при $\tau = 0$, соответствующая наличию источника в точке $(\tau = 0, \xi = 0)$. Следует отметить, что такой подход справедлив, если особая характеристика не подходит слишком близко к другой особой характеристике и к точке пересечения особых характеристик. Выражение (93), таким образом, может использоваться для простых оценок в ряде случаев.

Рассмотрим теперь нестационарную задачу. Пусть заряд на кольце меня-

ется во времени по квазимонохроматическому закону:

$$\varrho(\mathbf{r}, t) = \varrho(\mathbf{r}) \Pi_{[0, T]}(t) \exp(-i\omega_0 t), \quad (94)$$

где $\varrho(\mathbf{r})$ — пространственное распределение заряда, заданное соотношением (87), T — длительность импульса, ω_0 — несущая частота, причём $T\omega_0 \gg 1$. Тогда для нестационарного электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ имеем

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega, \quad (95)$$

где $\Gamma(\omega)$ — временной спектр импульсного монохроматического сигнала прямоугольной формы (см. раздел 1.2), зависимость $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ соответствует электрическому полю, возбуждаемому на частоте ω , и определяется соотношением (88), в котором надо положить $\omega_0 = \omega$.

Дальнейшее рассмотрение нестационарного поля, как видно, подразумевает интегрирование по частоте ряда по продольным волновым числам. Даже с учётом того, что ряд можно приближённо заменить конечной суммой, данная процедура весьма громоздка. Поэтому перейдём в соотношении (88) от суммирования к интегрированию.

Прежде всего отметим, что продольные волновые числа h_n , соответствующие квазистатическому полю, приближённо удовлетворяют равенству $J_1(ah_n/\mu_1) = 0$ (см. дисперсионное уравнение (81) и рис. 20). Используя аппроксимацию нулей функции Бесселя $J_1(ah_n/\mu_1)$, можно записать

$$\frac{ah_n}{\mu_1} \simeq \pi \left(n + \frac{1}{4} \right), \quad (96)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$. Данное приближение позволяет вычислить нули функции $J_1(ah_n/\mu_1)$ с достаточной степенью точности. Таким образом, разность соседних волновых чисел $\Delta h = h_{n+1} - h_n$ не зависит от индекса n и равна

$$\Delta h = \frac{\pi\mu_1}{a}. \quad (97)$$

Таким образом, переход в соотношении (88) от суммирования по n к

интегрированию по $dh = \Delta h$ даёт

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\Delta h} \int_0^{+\infty} C(h) \mathbf{E}(h, \mathbf{r}) \exp(-szh) dh, \quad (98)$$

где величины Δh , h и s являются функциями частоты ω . Проведённый переход к интегрированию корректен, если величина Δh много меньше характерного масштаба (по переменной h) изменения подынтегральной функции в равенстве (98). В рассматриваемом случае, как показывают соответствующие оценки, сделанный переход к интегрированию справедлив.

Таким образом, равенство (95) принимает вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi\Delta h} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \Gamma(\omega) C(h) \mathbf{e}(h, \rho) \exp[ihz(1 + is) - i\omega t] d\omega dh, \quad (99)$$

где $\mathbf{e}(h, \rho) = \mathbf{E}(h, \mathbf{r}) \exp(-ihz)$. Дальнейшее упрощение полученного интеграла связано с тем, что функция $\Gamma(\omega)$ отлична от нуля только в малой окрестности несущей частоты ω_0 . Поэтому разложим функцию $h(\omega)$ вблизи этой частоты в ряд, ограничиваясь линейным слагаемым:

$$h(\omega) = h(\omega_0) + \frac{\partial h}{\partial \omega}(\omega_0)(\omega - \omega_0). \quad (100)$$

Проведя несложные операции, получим

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\exp(-i\omega_0 t)}{2\pi\Delta h} \int_0^{+\infty} C(h) \mathbf{e}(h, \rho) \Pi_{[0, T]}(t - qhz) \exp[ihz(1 + is)] dh, \quad (101)$$

или

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \frac{\exp(-i\omega_0 t)}{2\pi\Delta h} I_{\mathbf{E}}\left(\frac{t}{qz}\right), & 0 < t < T, \\ \frac{\exp(-i\omega_0 t)}{2\pi\Delta h} \left[I_{\mathbf{E}}\left(\frac{t}{qz}\right) - I_{\mathbf{E}}\left(\frac{t-T}{qz}\right) \right], & t \geq T, \end{cases} \quad (102)$$

где

$$I_{\mathbf{E}}(\bar{\beta}) = \int_0^{\bar{\beta}} C(h) \mathbf{e}(h, \rho) \exp[ihz(1 + is)] dh.$$

В полученном выражении величины Δh и s рассчитываются при $\omega = \omega_0$ и предполагается, что $\mu_1 \ll 1$.

Полученное соотношение показывает, что в заданную точку в момент времени t приходят гармоники с волновыми числами от 0 до $t/(qz)$ при $0 < t < T$ и с волновыми числами от $(t - T)/(qz)$ до $t/(qz)$ при $t \geq T$. Эти гармоники бегут с разной групповой скоростью. Их интерференция и даёт картину поля, описываемую соотношением (102). Иными словами, набор волновых чисел гармоник схож с соответствующим набором в случае безграничной однородной плазмы. Как и в случае однородной плазмы, при удалении от источника вдоль оси волновода импульс деформируется: он расплывается и запаздывает. Оба эффекта усиливаются при увеличении расстояния от точки наблюдения до источника. Подчеркнём, что эффект расплывания получается, если ограничиться только линейным членом в разложении волнового числа по частоте. «Классическое» дисперсионное расплывание, за которое отвечает квадратичное слагаемое, здесь не рассматривается.

2. ДИНАМИКА ПЛАЗМЕННО-ВОЛНОВЫХ КАНАЛОВ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ В УСЛОВИЯХ РЕЗОНАНСА

Плазменно-волновой канал представляет собой возмущение концентрации плазмы, вытянутое вдоль внешнего магнитного поля. Он создаётся при ионизации газа или фоновой плазмы в области сильного электромагнитного поля излучающей антенны и поддерживается этим полем. Таким образом, плазменно-волновой канал является самосогласованной разрядной структурой. Волны, распространяющиеся в разрядной части канала и поддерживающие его, могут быть свистовыми или квазипотенциальными, т. е. в плазме канала выполняются условия резонанса. В данном разделе рассматривается случай, когда в канале распространяются квазипотенциальные волны нижнегибридного диапазона частот.

Плазменно-волновой канал (рис. 24) впервые был получен в лабораторных условиях. Впоследствии эксперименты по его созданию и изучению ставились как в лабораторных условиях [50, 51], так и в околоземной плазме с помощью антенн, установленных на ракетах [53, 54].

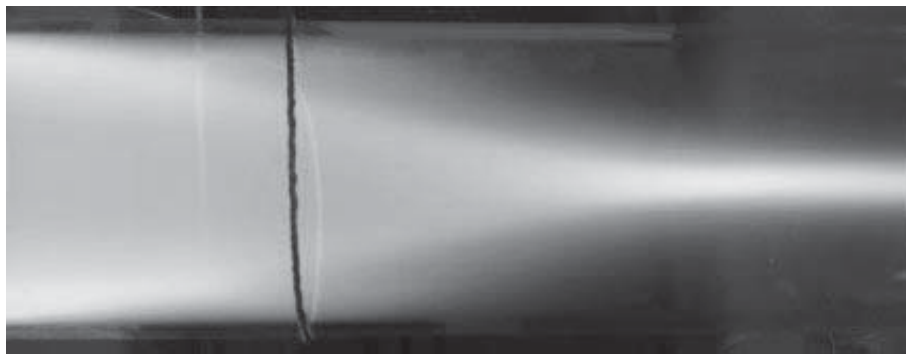


Рис. 24. Фотография плазменно-волнового канала, полученного в лаборатории [49, 52]

В настоящем разделе рассматривается нелинейная задача об ионизационном самоканалировании волн в плазме, в том числе нестационарный режим. В общем случае описание плазменно-волнового канала предполагает решение трёх самосогласованных уравнений: для концентрации и температуры электронов и электрического поля волны. Важно отметить, что нелинейность здесь является нелокальной, т. к. частицы плазмы в разряде движутся диффузионным образом.

2.1. Самосогласованные уравнения для электрического поля, концентрации и температуры электронов

Сформулируем самосогласованные уравнения для электрического поля, концентрации и температуры электронов в ситуации, отвечающей ионизационному самоканалированию волн в слабоионизованной столкновительной плазме в магнитном поле.

Уравнение для квазиэлектростатического поля волны в свободной от источников области имеет вид (12), где теперь $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}(N)$:

$$\operatorname{div} [\hat{\varepsilon}(N) \nabla \Phi] = 0. \quad (103)$$

Теперь обратимся к уравнению для концентрации плазмы. Для его получения воспользуемся уравнениями баланса числа электронов и ионов:

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{\Gamma}_e = I, \quad (104)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{\Gamma}_i = I, \quad (105)$$

где I — число электрон-ионных пар, образующихся за счёт ионизации и исчезающих за счёт прилипания и рекомбинации в единице объёма за единицу времени; N_e и N_i — концентрации, $\mathbf{\Gamma}_e$ и $\mathbf{\Gamma}_i$ — плотности потоков электронов и ионов соответственно. Выражения для последних запишем в предположении, что термодиффузия электронов и ионов пренебрежимо слаба (это справедливо в интересующих нас условиях, т. к. нагревом ионов можно пренебречь в силу их тяжести, а термодиффузию электронов можно не учитывать, если их

температура в разряде лишь незначительно отличается от «пробойной»):

$$\mathbf{\Gamma}_e = -\frac{1}{e}\hat{\sigma}_e\mathbf{E}_s - \hat{D}_e\nabla N_e, \quad (106)$$

$$\mathbf{\Gamma}_i = \frac{1}{e}\hat{\sigma}_i\mathbf{E}_s - \hat{D}_i\nabla N_i, \quad (107)$$

где \hat{D}_e и \hat{D}_i — тензоры диффузии, $\hat{\sigma}_e$ и $\hat{\sigma}_i$ — тензоры проводимости для электронов и ионов соответственно, \mathbf{E}_s — напряжённость электрического поля, которое возникает из-за наличия неоднородности концентрации, обусловленной разделением зарядов в плазме:

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_s = -4\pi e(N_e - N_i). \quad (108)$$

Используя теперь условие квазинейтральности $N_e \approx N_i$, заменим уравнения (104) и (105) одним уравнением для совместной концентрации электронов и ионов $N \equiv N_e = N_i$:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{\Gamma} = I, \quad (109)$$

где плотность потока $\mathbf{\Gamma}$ удовлетворяет условию

$$\operatorname{div} \mathbf{\Gamma}_e = \operatorname{div} \mathbf{\Gamma}_i = \operatorname{div} \mathbf{\Gamma},$$

а величина I выражается как

$$I = \nu_i N - \nu_a N - \alpha_r N^2 + I_{\text{ext}}. \quad (110)$$

Здесь ν_i — частота ударной ионизации, ν_a — частота диссоциативного прилипания электронов к нейтральным молекулам, α_r — коэффициент рекомбинации, I_{ext} — интенсивность внешнего источника ионизации, поддерживающего равновесную концентрацию фоновой плазмы N_2 и определяемого параметрами последней:

$$I_{\text{ext}} = (\alpha_{r0}N_2 + \nu_{a0} - \nu_{i0})N_2,$$

где индекс 0 соответствует фоновым значениям величин ν_i , ν_a и α_r .

Важно отметить, что величины \hat{D}_e , \hat{D}_i , $\hat{\sigma}_e$, $\hat{\sigma}_i$, ν_i , ν_a , α_r являются функциями температуры электронов T_e .

Следующий шаг подразумевает подстановку величин $\mathbf{\Gamma}_e$ и $\mathbf{\Gamma}_i$ из соот-

ношений (106) и (107) в уравнение (109). В отсутствие внешнего магнитного поля получающееся таким образом уравнение сводится к уравнению диффузии: условие квазинейтральности приводит к амбиполярности диффузии, что позволяет исключить из системы уравнений электрическое поле \mathbf{E}_s . В магнитном поле многие одномерные задачи тоже сводятся к уравнению амбиполярной диффузии. В неодномерном же случае, хоть условие квазинейтральности и позволяет исключить из уравнений поле \mathbf{E}_s , получающееся уравнение, вообще говоря, не может быть записано в форме уравнения диффузии [83–85]. Это связано с тем, что в общем случае невозможно построить потенциальное электрическое поле, удовлетворяющее этому условию. Другими словами, электрическое поле, которое во всех направлениях тормозит более подвижные частицы и уравнивает потоки в каждой точке, в общем случае не реализуется. При этом протекающие по плазме вихревые токи определяющим образом влияют на эволюцию профиля концентрации плазмы. Уравнения, описывающие диффузионное расплывание неоднородности, оказываются нелинейными и не сводятся к обычному уравнению диффузии в анизотропной среде. Тем не менее при выполнении условия

$$\frac{L_{\parallel}^2}{L_{\perp}^2} \gg \frac{D_{e\parallel}}{D_{i\perp}}, \quad (111)$$

где L_{\parallel} и L_{\perp} — характерные продольный и поперечный масштабы неоднородности концентрации N соответственно, индексы \perp и \parallel соответствуют диффузии поперёк и вдоль магнитного поля, уравнение баланса концентрации приближённо может быть записано в форме уравнения диффузии [83]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[D_{\parallel}(T_e) \frac{\partial N}{\partial z} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho D_{\perp}(T_e) \frac{\partial N}{\partial \rho} \right] + \\ + [\nu_i(T_e) - \nu_a(T_e)]N - \alpha_r(T_e)N^2 + I_{\text{ext}}, \quad (112) \end{aligned}$$

где коэффициенты диффузии при условии $T_i \ll T_e$, где T_i — температура ионов, выражаются как

$$D_{\parallel} = \frac{T_e}{m_e \nu_e}, \quad D_{\perp} = \frac{T_e \nu_e}{m_e \omega_{ce}^2}.$$

Отметим, что в рассматриваемых условиях слабой ионизации плазмы основной вклад в частоту столкновений ν_e , входящую в эти выражения, дают столкновения электронов с нейтральными молекулами. Расчёты показывают, что в

рассматриваемой задаче условие (111) выполняется, т. е. уравнение (112) можно использовать.

Наконец, уравнение для температуры электронов в рассматриваемых приближениях имеет вид

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} = \frac{1}{N} \operatorname{div}(\hat{\chi}_e \nabla T_e) + \frac{2}{3N} (\mathbf{E}, \hat{\sigma}_e \mathbf{E}) - \delta_{em} \nu_e (T_e - T_0) + \frac{2\bar{Q}}{3N}, \quad (113)$$

где T_0 — фоновая температура электронов, \bar{Q} — объёмная плотность энергии, сообщаемой электрону в единицу времени, $\hat{\chi}_e$ — тензор электронной теплопроводности, δ_{em} — доля энергии, теряемой электроном при соударении с молекулой [86].

2.2. Самосогласованные нестационарные распределения электрического поля и электронной концентрации в плазменно-волновом канале

Будем далее предполагать, что электронная температура T_e в канале почти однородна и не изменяется со временем. Это позволяет с некоторыми оговорками, которые будут приведены далее, ограничиться системой двух самосогласованных уравнений для электрического поля волны и концентрации электронов. Отметим, что анализ этой системы в некоторых простых случаях проведён в монографии [5].

Допустим также следующее. Прежде всего, будем считать, что разрядная часть канала, которая вытягивается (растёт) вдоль магнитного поля, состоит из стационарной и сравнительно короткой нестационарной областей (рис. 25). В стационарной области концентрация электронов и амплитуда поля полагаются установившимися, т. е. не зависящими от времени. Кроме того, плазма в этой области полагается однородной, прежде всего благодаря сильной продольной диффузии. (При этом, вообще говоря, плазма неоднородна в поперечном направлении. Тем не менее для расчётов поля в стационарной области и при рассмотрении окрестности фронта ионизации достаточно полагать, что плазма в стационарной области однородна не только в продольном, но и в поперечном направлении.) Стационарная область простирается от области источника

(точнее, от области формирования канала) до границы с нестационарной областью. В нестационарной области происходят сложные нестационарные процессы ионизации и установления поля и концентрации электронов. Эта часть имеет некоторую длину Δ_0 и перемещается вдоль магнитного поля со скоростью фронта ионизации, равной групповой скорости квазипотенциальных волн [5]

$$V_{\text{gr}} = \frac{b\sqrt{1 + \mu_1^2}}{\partial\mu_1(\omega_0)/\partial\omega}. \quad (114)$$



Рис. 25. Условная схема канала: 1 — стационарная область, 2 — нестационарная область, 3 — диффузионная часть. Области 1 и 2 образуют разрядную часть

Поясним смысл величины V_{gr} . Как показывают дальнейшие расчёты, основной вклад в затухание квазипотенциальных волн в стационарной области дают столкновительные, а не ионизационные потери. Вместе с предыдущими допущениями это означает, что структура электрического поля в этой области совпадает с найденной в предыдущем разделе и представляет собой суперпозицию собственных мод. Каждая такая мода, вообще говоря, характеризуется собственной групповой скоростью. Однако в рассматриваемых условиях наиболее интенсивно возбуждается мода с продольным волновым числом, величина которого обратно пропорциональна характерному размеру излучающего диполя, т. е. в данном случае величине $b = a$. Групповая скорость в выражении (114) отвечает именно этой моде. Выбор групповой скорости в качестве скорости вытягивания канала обсуждается ниже.

Таким образом, нестационарная область локализована на движущемся со скоростью V_{gr} промежутке $V_{\text{gr}}t - \Delta_0 \leq z \leq V_{\text{gr}}t$. Вся мощность, подводимая от диполя к этой области, идёт на ионизацию в ней. (Расчёты показывают, что в этой области акты ионизации происходят гораздо чаще, чем столкновения.) По-

сколькx фронт ионизации движется со скоростью V_{gr} , падающая от источника волна не отражается из нестационарной области и от фронта ионизации.

При $z > V_{\text{gr}}t$, т. е. перед фронтом ионизации, находится диффузионная часть канала. В ней поле исчезающе мало, а заряженные частицы появляются за счёт продольной диффузии из разрядной части, главным образом из нестационарной области.

Отметим также, что, как только фронт ионизации достигает области, расстояние от которой до источника равно масштабу столкновительного затухания волн, формирование канала прекращается и реализуется полностью стационарный режим, который характеризуется конечной длиной канала L . Для оценки этой длины, а также концентрации N_1 и средней температуры электронов T_e в разрядной части запишем соотношения

$$D_{\parallel}/L^2 + D_{\perp}/a^2 + \nu_i - \nu_a - \alpha_r N_1 + I_{\text{ext}}/N_1 = 0, \quad (115)$$

$$N_1 = \frac{2W_0}{3\pi a^2 L \delta_{\text{em}} \nu_e T_e}, \quad (116)$$

$$a^2 = D_{\perp}/\nu_i, \quad (117)$$

$$L = \omega_0 a / \nu_e, \quad (118)$$

где W_0 — мощность, излучаемая антенной и вкладываемая в разряд, a — радиус канала, который для простоты считается равным радиусу антенного кольца. Ясно, что последнее предположение не ограничивает общность рассмотрения. Соотношение (115) следует из уравнения баланса концентрации в стационарном режиме, а соотношение (116) — из уравнения для температуры частиц. Соотношение (117) подразумевает, что радиус канала определяется длиной, которую проходят частицы вследствие поперечной диффузии за время ионизации. Соотношение (118) выражает длину канала как масштаб столкновительного затухания квазипотенциальных волн. Отметим, что аналогичные соотношения были получены ранее для случая каналирования свистовых (электромагнитных) волн (см., например, статью [62]).

Зависимости величин ν_i , ν_a , α_r и ν_e от температуры в интервале её

значений ниже 3 эВ и ряда других факторов имеют вид

$$\begin{aligned}\nu_e[\text{с}^{-1}] &= 1,23 \cdot 10^{-7} N_m[\text{см}^{-3}] (T_e[\text{эВ}])^{5/6}, \\ \nu_i[\text{с}^{-1}] &= 2,7 \cdot 10^{-8} N_m[\text{см}^{-3}] \left(\frac{T_e}{I_0}\right)^{1/2} \left(1 + 2\frac{T_e}{I_0}\right) \exp\left(-\frac{I_0}{T_e}\right), \\ \nu_a[\text{с}^{-1}] &= 7,2 \cdot 10^{-12} N_m[\text{см}^{-3}], \\ \alpha_r[\text{см}^3/\text{с}] &= 5 \cdot 10^{-7} \left(\frac{0,026}{T_e[\text{эВ}]}\right)^{1,2},\end{aligned}$$

где N_m — концентрация нейтральных молекул, I_0 — эффективный потенциал их ионизации, принимаемый равным 14 эВ (см. [86], [87]).

Далее рассматриваются характерные условия ночной ионосферы на высоте 150 км [86], которые приведены в табл. 1. Соответствующие параметры канала, найденные для частоты $\omega_0 = 4,3 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$ и мощности сигнала $W_0 = 0,07 \text{ кВт}$ из системы (115)—(118), приведены в табл. 2.

Рассмотрим теперь нестационарную область разрядной части канала. Её продольный размер Δ_0 определим как длину, на которую перемещается фронт ионизации за характерное время ионизации:

$$\Delta_0 = \frac{V_{\text{gr}}}{\nu_i - \nu_a}. \quad (119)$$

Будем полагать, что длина Δ_0 много меньше радиуса канала a , причём это подтверждается проведёнными расчётами.

Отметим, что форма нестационарной области такова, что соответствующая граница между областями гиперболичности и эллиптичности уравнения для потенциала волны может быть аппроксимирована, например, параболоидом. Это означает, что особые характеристики гиперболического уравнения для потенциала, входящие в эту область из стационарной области, сваливаются в точку с координатой $\rho = 0$ на переднем фронте (в соответствующем фазовом пространстве это особая точка типа фокус или узел в зависимости от кривизны границы между областями гиперболичности и эллиптичности [5]), испытывая изломы на параболической границе (см. рис. 26). Иными словами, в рассматриваемой нестационарной области происходит значительное уплотнение (сгущение) особых характеристик в пространстве. Это означает, что величина электрического поля в этой области значительно больше, чем в

Концентрация молекул, см^{-3}	$6,9 \cdot 10^{10}$
Температура молекул, эВ	0,056
Концентрация плазмы, см^{-3}	$2,4 \cdot 10^3$
Температура электронов, эВ	0,058
Температура ионов, эВ	0,056
Частота электрон-молекулярных соударений, с^{-1}	$8,0 \cdot 10^2$
Частота электрон-ионных соударений, с^{-1}	6,7
Частота ион-ионных соударений, с^{-1}	0,022
Геомагнитное поле, Э	0,5

Таблица 1. Характерные параметры ночной ионосферы на высоте 150 км

Температура электронов, эВ	1,49
Температура ионов, эВ	0,056
Концентрация плазмы, см^{-3}	$1,0 \cdot 10^4$
Длина разрядной части канала, км	9,31
Длина диффузионной части канала, км	6,67
Радиус канала, м	25,6

Таблица 2. Параметры канала, возбуждаемого на высоте 150 км в ночной ионосфере дипольной антенной с мощностью 0,07 кВт и частотой $4,3 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$

точках пересечения особых характеристик в стационарной области. Фактически это обстоятельство и определяет интенсивную ионизацию в нестационарной области и вытягивание канала в направлении магнитного поля. Более того, оценки показывают, что в этой области основной вклад в баланс концентрации даёт не диффузия, а ионизация. Иными словами, в нестационарной области за характерное время ионизации частицы перемещаются вследствие диффузии на гораздо меньшее расстояние, чем фронт ионизации, и поэтому диффузионным слагаемым можно пренебречь. Отметим, что в стационарной области, напротив, основной вклад в баланс концентрации вносит диффузия.

Будем искать в нестационарной области в окрестности фронта ионизации самосогласованные солитоноподобные распределения электрического поля \mathbf{E} и концентрации N , которые зависят от автомодельной переменной $z' = z - V_{\text{gr}}t$. (Пусть координата z' отсчитывается от переднего края фронта ионизации.) Выбор автомодельной переменной в такой форме означает, что искомые структуры поля и концентрации плазмы стационарны и распространяются вдоль оси z со скоростью V_{gr} . При поиске таких распределений в системе уравнений (103), (112) необходимо представить частоту ионизации ν_i как функцию комплексной амплитуды электрического поля. Известно [48], что если продольный масштаб электронной теплопроводности L_T мал по сравнению с соответствующим пространственным масштабом электрического поля L_E , то зависимость $\nu_i(|\mathbf{E}|)$ имеет локальный характер и справедлива степенная аппроксимация

$$\nu_i(|\mathbf{E}|) = (|\mathbf{E}|/E_p)^\beta \nu_a, \quad (120)$$

где E_p — пробойное поле в плазме, β — показатель крутизны зависимости частоты ионизации от амплитуды электрического поля волны, причём для воздуха $\beta = 16/3$ [88]. Вблизи фронта ионизации условие $L_T \ll L_E$ нарушается, однако всё равно будем использовать эту зависимость по следующим причинам. Во-первых, как уже отмечалось, в рамках предлагаемой модели наиболее интенсивная ионизация идёт только в нестационарной части, где поле особенно велико. Именно этому и соответствует локальная связь в формуле (120). Во-вторых, эта формула является весьма простой и позволяет получить верную качественную картину динамики концентрации плазмы и электрического поля вблизи фронта ионизации в рамках используемых приближений.

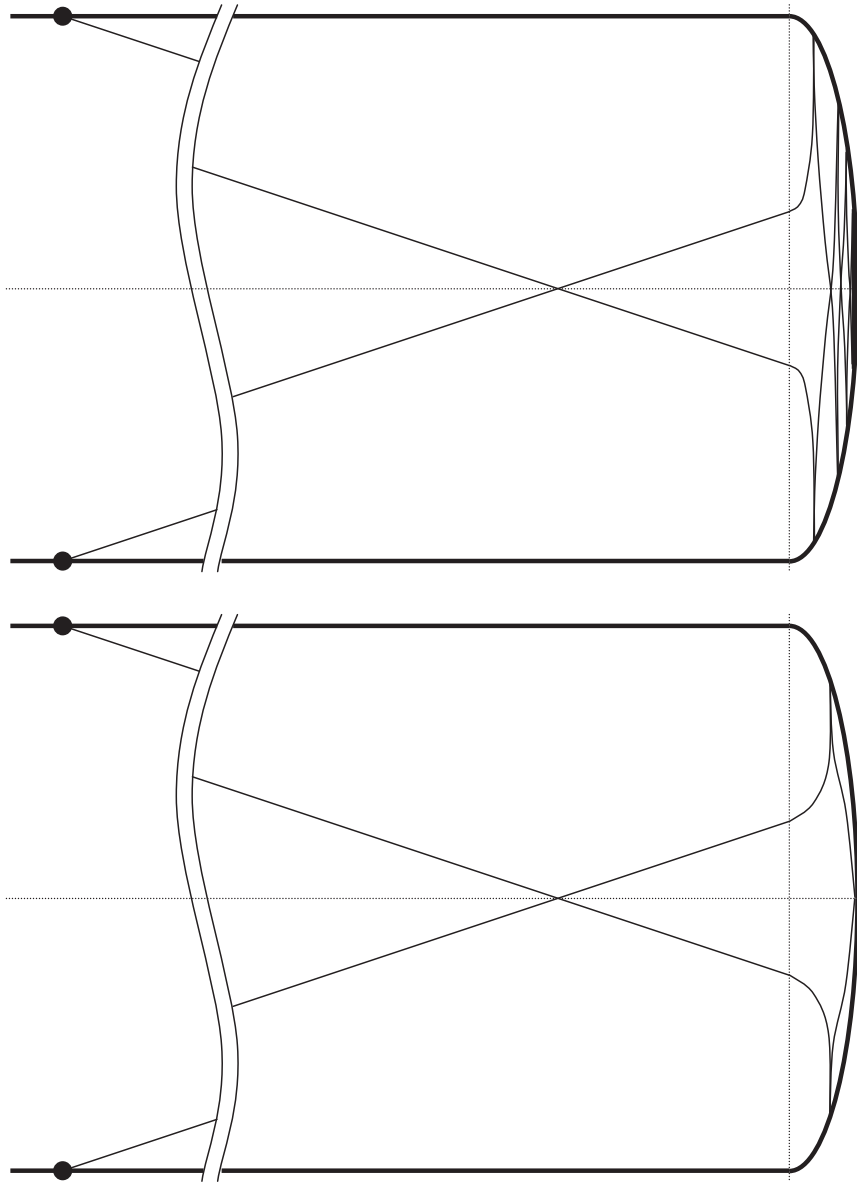


Рис. 26. Ход особых характеристик в стационарной (левее вертикальной пунктирной линии) и нестационарной (правее вертикальной пунктирной линии) областях разрядной части канала, исходящих из кольца (точки слева). Толстыми линиями показана гиперболическая граница. В нестационарной области происходит сгущение особых характеристик и их «сваливание» в особую точку типа фокус (сверху) или узел (снизу) на фронте ионизации

Таким образом, в нестационарной области для автомодельных самосогла-
сованных распределений величин $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ и N в переменных ρ и z' можно
записать систему уравнений

$$\frac{\partial N}{\partial z'} = \frac{\nu_a}{V_{\text{gr}}} \left[1 - \left(\frac{|\nabla\Phi|}{E_p} \right)^\beta \right] N + \frac{\alpha_r}{V_{\text{gr}}} N^2 - \frac{I_{\text{ext}}}{V_{\text{gr}}}, \quad (121)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\left(1 + \frac{N}{N_m} (1 + is) \right) \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right] + \frac{\partial}{\partial z'} \left[\left(1 - \frac{N}{N_c} (1 - is) \right) \frac{\partial \Phi}{\partial z'} \right] = 0, \quad (122)$$

где $N_m = H_0^2/(4\pi m_e c^2)$, $N_c = m_e \omega_0^2/(4\pi e^2)$ — критическая концентрация
плазмы. Уравнение (121) представляет собой уравнение для баланса концен-
трации электронов в движущейся системе координат, учитывающее процессы
ионизации (за счёт внешнего источника и ударов электронов), прилипания и
рекомбинации. Соотношение (122) представляет собой уравнение (103) с распи-
санным по координатам дифференциальным оператором. Учёт столкновений
в последнем соотношении сделан для снятия сингулярности в распределении
электрического поля.

Система уравнений (121)—(122) чрезвычайно сложна для анализа во всей
нестационарной области даже с учётом условия $\Delta_0 \ll a$ и того обстоятельства,
что поле локализовано на особых характеристиках. Дело в том, что в силу
отмеченной выше сравнительно высокой плотности особых характеристик
укорочение уравнения (122) не приводит к соотношению, корректно описы-
вающему распределение поля вдоль некоторой особой характеристики. По
этой причине ограничимся рассмотрением только той области, которая близка
к точке $(\rho = 0, z' = 0)$ на параболической границе, в которую сходятся
особые характеристики: вблизи этой точки они являются квазиперечными
по отношению к внешнему магнитному полю. Следовательно, в нестационарной
области в окрестности фронта ионизации можно считать, что поле имеет только
компоненту E_z , а задачу можно полагать одномерной.

В соответствии с вышесказанным перепишем систему (121)—(122) в виде

$$\frac{dN}{dz'} = \frac{\nu_a}{V_{\text{gr}}} \left[1 - \left(\frac{|E_z|}{E_p} \right)^\beta \right] N + \frac{\alpha_r}{V_{\text{gr}}} N^2 - \frac{I_{\text{ext}}}{V_{\text{gr}}}, \quad (123)$$

$$\frac{d}{dz'} \{ [N_c - N(1 - is)] E_z \} = 0. \quad (124)$$

Уравнение (124) интегрируется и позволяет установить связь между величинами E_z и N :

$$E_z = \frac{U}{N_c - N(1 - is)}, \quad (125)$$

где U — некоторая константа. Подставляя величину E_z в соотношение (123), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для функции $N(z')$:

$$\frac{dN}{dz'} = \frac{\nu_a}{V_{gr}} \left[1 - \left(\frac{|U|}{E_p |N_c - N(1 - is)|} \right)^\beta \right] N + \frac{\alpha_r}{V_{gr}} N^2 - \frac{I_{ext}}{V_{gr}}. \quad (126)$$

Поскольку граница $z' = 0$ разделяет области эллиптичности и гиперболичности уравнения для потенциала, условие для функции $N(z')$ на этой границе, очевидно, имеет вид

$$N(z' = 0) = N_c. \quad (127)$$

Тогда решение уравнения (126) можно записать в неявной форме

$$z' = \int_{N_c}^N \left\{ \frac{\nu_a}{V_{gr}} \left[1 - \left(\frac{|U|}{E_p |N_c - N'(1 - is)|} \right)^\beta \right] N' + \frac{\alpha_r}{V_{gr}} N'^2 - \frac{I_{ext}}{V_{gr}} \right\}^{-1} dN'. \quad (128)$$

Константу U определим из условия, что вся подводимая от антенны к нестационарной области мощность идёт на ионизационные потери в этой области. Для этого запишем теорему Пойнтинга в виде

$$\operatorname{Re} \left(\frac{c}{8\pi} \operatorname{div}[\mathbf{E}, \mathbf{H}^*] \right) = \frac{\omega_0}{8\pi} \operatorname{Im} (\mathbf{E}(\hat{\varepsilon}\mathbf{E})^*), \quad (129)$$

где индекс $*$ означает комплексное сопряжение. Расписывая правую часть в последнем равенстве и интегрируя его по нестационарной области, получаем соотношение для определения константы U :

$$P(z' = -\Delta_0) = \frac{a^2 N_1}{16 N_c} \nu_i(E_{\max}) |E_{\max}|^2 \Delta_0 \tilde{g}. \quad (130)$$

Здесь

$$P(z' = -\Delta_0) = 0,25 \int_0^a E_\rho H_\varphi^* \rho \, d\rho \Big|_{z' = -\Delta_0}$$

— подводимая к нестационарной области мощность, рассчитываемая в исходной

(лабораторной) системе отсчёта, $E_{\max} = E_z(z' = 0) = U/(isN_c)$, \tilde{g} — геометрический фактор порядка 1.

На рис. 27 приведены найденные самосогласованные распределения величины электрического поля $|E_z(z')|$ и электронной концентрации $N(z')$ в нестационарной области в окрестности фронта ионизации. Соответствующая длина нестационарной области примерно равна $\Delta_0 = 0,1a$. Отметим, что поле в особой точке на параболической границе более чем на порядок величины превосходит пробойное значение. Концентрация в рассматриваемой области в данном приближении близка к критической. В то же время ясно, что отмеченное усиление поля вблизи параболической границы приводит к особенно интенсивной ионизации и, следовательно, к значительному росту концентрации в нестационарной области до значений больше или порядка N_1 . Следовательно, для более корректного описания необходимо принимать во внимание двумерность задачи и кривизну параболической границы, что представляет собой значительную сложность.

Отметим, что подводимая мощность медленно уменьшается во времени из-за столкновительных потерь в стационарной части. Это приводит к медленному изменению длины Δ_0 и константы U , поэтому найденные распределения слабо зависят от времени, качественно при этом не меняясь.

В диффузионной части ($z' > 0$) электрическое поле исчезающе мало, т. к. квазипотенциальные волны не доходят до неё. Продольный масштаб L_{diff} , на который простирается эта часть в стационарном режиме, определяется потерями частиц из-за прилипания:

$$L_{\text{diff}} = \sqrt{D_{\parallel}/\nu_a}. \quad (131)$$

В рассматриваемых условиях этот масштаб равен $L_{\text{diff}} = 6,67$ км.

Теперь обсудим вопрос о скорости роста канала в направлении магнитного поля. В проведённых выше рассуждениях и расчётах она полагалась равной характерной групповой скорости квазипотенциальных волн V_{gr} , т. е. являлась фактически заданной величиной. Однако самосогласованность задачи подразумевает, что при поиске распределений электрического поля волны и концентрации плазмы скорость роста плазменного шнура должна определяться из исходных уравнений. Тем не менее в данном случае в силу исключительной

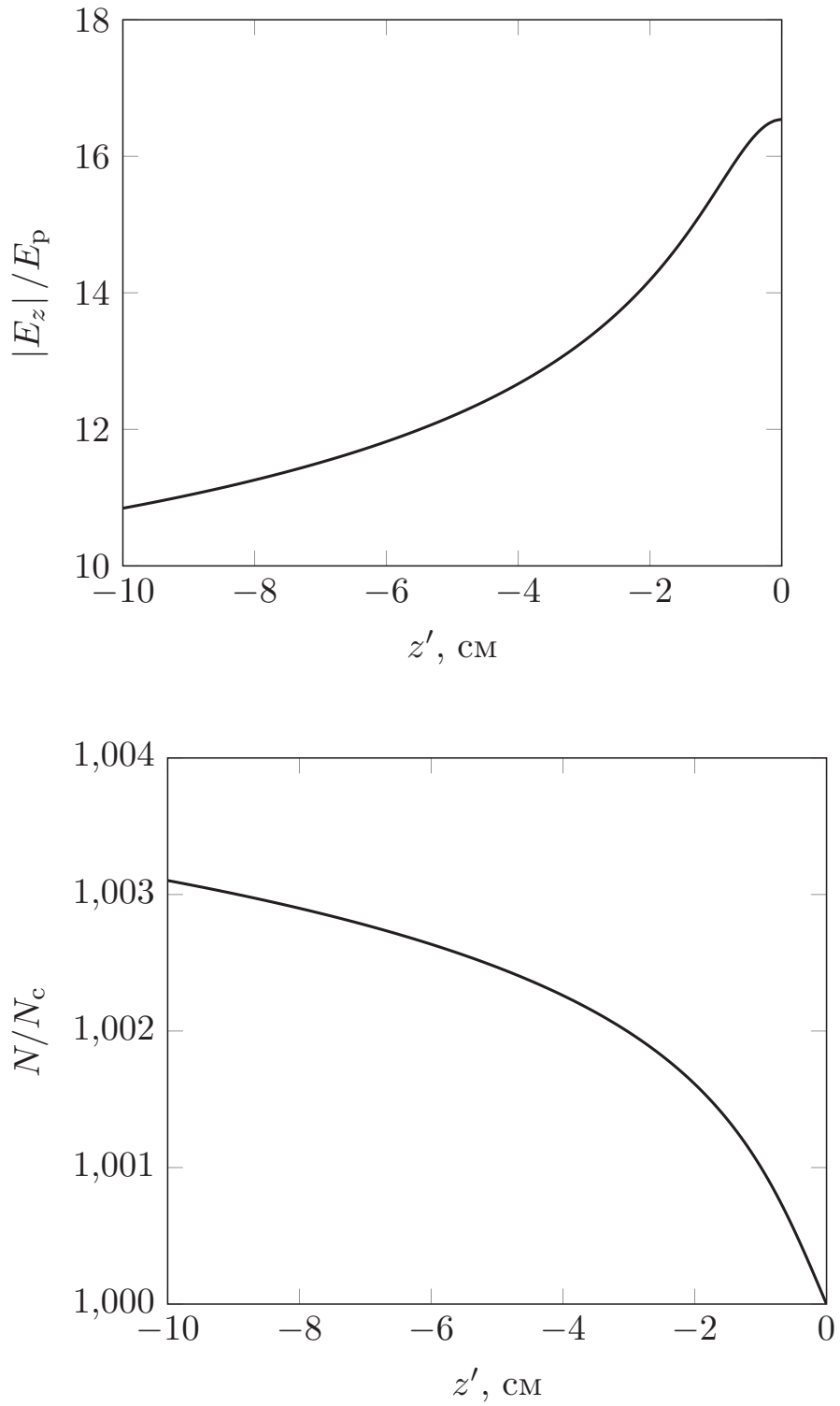


Рис. 27. Солитоноподобные распределения $|E_z(z')|$, $N(z')$ вблизи фронта ионизации. Координата $z' = 0$ соответствует расположению фронта ионизации в сопутствующей системе отсчёта

сложности полного самосогласованного описания плазменно-волнового канала аналитическое или численное определение скорости роста последнего представляет значительную трудность. Поэтому ограничимся общими рассуждениями.

С одной стороны, ясно, что скорость роста канала не может быть больше скорости V_{gr} , т. к. в этом случае волна не будет успевать переносить энергию к фронту ионизации. При этом, вообще говоря, вместе с медленными квазипотенциальными волнами в плазменном дакте могут каналироваться электромагнитные свистовые волны, групповая скорость которых может достигать значений порядка скорости света. Однако в рассматриваемом квазистатическом приближении свистовые волны возбуждаются очень слабо: отношение мощностей излучения электромагнитной и квазиэлектростатической мод по порядку величины составляет третью степень малого параметра квазистатики $v = b/\lambda \ll 1$ [А3]. Следовательно, вкладом свистовых волн в ионизацию и поддержание канала в данном случае можно пренебречь.

С другой стороны, скорость роста канала, вообще говоря, может быть меньше скорости V_{gr} . При этом в общем случае не вся подводимая от антенны мощность поглощается вблизи фронта ионизации, т. к. появляется отражённая от этого фронта волна, распространяющаяся обратно к излучающей антенне. В такой ситуации условие (130), используемое при решении системы уравнений (123)—(124), не выполняется и построение самосогласованной модели по описанной выше схеме невозможно.

Возможность выбора величины V_{gr} в качестве скорости роста канала подтверждается разумными значениями электрического поля на фронте ионизации (рис. 27), полученными в ходе расчётов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведём основные результаты, полученные в данной работе.

1) Исследовано распространение медленных квазиэлектростатических волн, возбуждаемых в магнитоактивной плазме в резонансной полосе частот гармоническим источником в импульсном режиме. Найдены эффекты группового запаздывания и аномального распывания сигнала в случае его распространения в однородной и кусочно-однородной плазме.

2) Детально интерпретированы результаты двухточечного (излучатель—приёмник) ионосферного эксперимента OEDIPUS-C на высотах $600 \div 800$ км, в котором уже на расстояниях порядка десяти длин волн (частота 100 кГц, длина волны 124 м) наблюдалось заметное запаздывание сигнала, приблизительно равное $(1 \div 3) \cdot 10^{-4}$ с, и значительное (в несколько раз) распывание импульса с начальной длительностью 0,3 мс.

3) Аналитически найден класс пространственно-временных распределений резонансного поля излучения в линейном режиме, которые зависят от «автомодельной» переменной, включающей в себя и время, и пространственные координаты.

4) Изучено ионизационное самоканалирование квазипотенциальных волн в нижнегибридном диапазоне частот, приводящее к образованию плазменно-волнового канала. По заданным характеристикам излучателя и фоновой плазмы определены основные параметры плазмы канала: например, в характерных условиях ночной ионосферы на высоте 150 км квазистатическая дипольная антенна из двух колец с радиусом 25,6 м, частотой излучения $4,3 \cdot 10^6$ с⁻¹ и мощностью сигнала 0,07 кВт возбуждает канал со средней температурой

электронов 1,49 эВ, концентрацией $1,0 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}$ и длиной разрядной части 9,31 км.

5) Аналитически найдены нестационарные самосогласованные распределения концентрации плазмы и величины электрического поля в малой области за фронтом ионизации. Показано, что величина электрического поля на самом фронте ионизации в рамках предложенной модели более чем на порядок величины превышает пробойное значение.

6) Показано, что численный метод моментов может быть использован для расчёта распределений заряда по поверхности антенн в магнитоактивной плазме в квазистатическом приближении, в том числе в резонансных условиях, когда функция Грина уравнения для потенциала комплексная и имеет особенность на характеристиках этого уравнения. Проведённые тестовые расчёты показали сравнительно высокую точность метода: например, относительная ошибка вычисления входного импеданса таким методом не превышает 1 % при числе сегментов, на которые условно разделяется антенный провод, порядка 10. Показано, что в отличие от вакуума, в магнитоактивной плазме даже для тонкого провода во многих случаях в расчётах важно учитывать зависимость поверхностного заряда от азимутального угла.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шафранов В. Д.* Электромагнитные волны в плазме // Вопросы теории плазмы. Вып. 3. М. : Госатомиздат, 1963. С. 3–140.
2. *Гинзбург В. Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме. М. : Наука, 1967. 684 с.
3. *Кролл Н., Трайвеллис А.* Основы физики плазмы. М. : Мир, 1975. 526 с.
4. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика. М. : Наука, 1979. 528 с.
5. *Мареев Е. А., Чугунов Ю. В.* Антенны в плазме. Нижний Новгород : ИПФ АН СССР, 1991. 232 с.
6. *Железняков В. В.* Излучение в астрофизической плазме. М. : «Янус-К», 1997. 528 с.
7. Geospace Electromagnetic Waves and Radiation / J. W. LaBelle, R. A. Treumann (Eds.). Berlin : Springer, 2006. 341 p.
8. Плазменная гелиогеофизика : в 2 т. / под ред. Л. М. Зеленого, И. С. Веселовского. М. : Физматлит, 2008. Т. 1. 672 с. ; Т. 2. 560 с.
9. *Chugunov Y. V., Fiala V., Hayosh M., James H. G.* Whistler mode resonance-cone transmissions at 100 kHz in the OEDIPUS-C experiment // Radio Sci. 2012. V. 47, № 6. Art. no. RS6002.

10. *Agapitov O. V., Artemyev A. V., Mourenas D., et al.* The quasi-electrostatic mode of chorus waves and electron nonlinear acceleration // *J. Geophys. Res. Space Physics*. 2014. V. 119, № 3. P. 1606–1626.
11. *Kondrat'ev I. G., Kudrin A. V., Zaboronkova T. M.* *Electrodynamics of Density Ducts in Magnetized Plasmas*. Amsterdam : Gordon and Breach Science Publishers, 1999. 288 p.
12. *Андронов А. А., Чугунов Ю. В.* Квазистационарные электрические поля источников в разреженной плазме // *УФН*. 1975. Т. 116, № 1. С. 79–113.
13. *Balmain K. G.* The impedance of a short dipole antenna in a magnetoplasma // *IEEE Trans. Antennas Propag.* 1964. V. 12, № 5. P. 605–617.
14. *Чугунов Ю. В.* Квазистатическая теория антенны в магнитоактивной плазме при наличии плазменного резонанса // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1968. Т. 11, № 12. С. 1829–1838.
15. *Леонтович М. А., Левин М. Л.* К теории возбуждения колебаний в вибраторах антенн // *ЖТФ*. 1944. Т. 14, № 9. С. 481–506.
16. *Kaiser T. R., Tunaley J. K. E.* Radio-frequency impedance probes // *Space Science Reviews*. 1968. V. 8, № 1. P. 32–73.
17. *Бункин Ф. В.* Об излучении в анизотропных средах // *ЖЭТФ*. 1957. Т. 32, № 2. С. 338–346.
18. *Kogelnic H.* On electromagnetic radiation in magneto-ionic media // *J. Res. Nat. Bur. Stand.* 1960. V. 64D, № 5. P. 515–523.
19. *Kuehl H. H.* Electromagnetic radiation from an electric dipole in a cold anisotropic plasma // *Phys. Fluids*. 1962. V. 5, № 9. P. 1095–1103.
20. *Arbel E., Felsen L. B.* *Theory of radiation from sources in anisotropic media* // *Electromagnetic Theory and Antennas. Part 1*. New York : Pergamon Press, 1963. P. 391–459.

21. *Fisher R. K., Gould R. W.* Resonance cones in the field pattern of a radio frequency probe in a warm anisotropic plasma // *Phys. Fluids*. 1971. V. 14, № 4. P. 857–867.
22. *Singh N., Gould R. W.* Waves in a hot uniaxial plasma excited by a current source // *Phys. Fluids*. 1973. V. 16, № 1. P. 75–81.
23. *Kuehl H. H.* Electric field and potential near the plasma resonance cone // *Phys. Fluids*. 1974. V. 17, № 6. P. 1275–1283.
24. *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. Т. 2. М. : Мир, 1978. 556 с.
25. *Мареев Е. А., Чугунов Ю. В.* О возбуждении плазменного резонанса сторонним источником в магнитоактивной плазме. 1. Источник в однородной плазме // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1987. Т. 30, № 8. С. 961–967.
26. *Денисов Н. Г., Докучаев В. П., Тамойкин В. В.* О нестационарном излучении дипольных источников в плазме с диагональным тензором диэлектрической проницаемости // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1973. Т. 16, № 3. С. 351–357.
27. *Беллюстин Н. С.* Установление резонансных полей в магнитоактивной плазме // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1977. Т. 20, № 11. С. 1605–1613.
28. *Галушко Н. П., Ерохин Н. С., Моисеев С. С.* Распределение полей источника и поглощение энергии в неоднородной плазме // *ЖЭТФ*. 1975. Т. 69, № 1. С. 142–154.
29. *Чугунов Ю. В.* Об особенностях квазиэлектростатического поля источников в магнитоактивной плазме // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1971. Т. 14, № 1. С. 44–52.
30. *Пилля А. Д., Фёдоров В. И.* Особенности поля электромагнитной волны в холодной анизотропной плазме с двумерной неоднородностью // *ЖЭТФ*. 1971. Т. 60, № 1. С. 389–399.

31. *Мареев Е. А., Чугунов Ю. В.* О возбуждении плазменного резонанса сторонним источником в магнитоактивной плазме. 2. Источник в неоднородной плазме // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30, № 9. С. 1073–1078.
32. *Кудрин А. В., Марков Г. А.* О дисперсионных и согласующих свойствах неоднородных плазменных волноводов // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34, № 2. С. 163–172.
33. *Заборонкова Т. М., Костров А. В., Кудрин А. В. и др.* Каналирование волн свистового диапазона в неоднородных плазменных структурах // ЖЭТФ. 1992. Т. 102, № 4. С. 1151–1166.
34. *Заборонкова Т. М., Кудрин А. В., Марков Г. А.* Волны свистового диапазона, направляемые каналами с повышенной плотностью плазмы // Физика плазмы. 1993. Т. 19, № 6. С. 769–780.
35. *Заборонкова Т. М., Кондратьев И. Г., Кудрин А. В.* Излучение волн свистового диапазона в магнитоактивной плазменной среде при наличии дактов плотности // Изв. вузов. Радиофизика. 1994. Т. 37, № 7. С. 887–908.
36. *Kondrat'ev I. G., Kudrin A. V., Zaboronkova T. M.* Excitation and propagation of electromagnetic waves in nonuniform density ducts // Physica Scripta. 1996. V. 54, № 1. P. 96–112.
37. *Заборонкова Т. М., Кондратьев И. Г., Кудрин А. В.* Излучение кольцевых источников диапазона очень низких частот в магнитоактивной плазменной среде при наличии цилиндрического плазменного канала // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42, № 1. С. 43–50.
38. *Заборонкова Т. М., Костров А. В., Кудрин А. В., Шайкин А. А.* Каналирование вистлеров в дактах с повышенной плотностью в магнитоактивной плазме // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. 41, № 3. С. 384–392.
39. *Заборонкова Т. М., Кудрин А. В., Лях М. Ю., Попова Л. Л.* Несимметричные свистовые волны, направляемые цилиндрическими дактами с повышенной плотностью плазмы // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. 45, № 10. С. 835–857.

40. *Вдовиченко И. А., Марков Г. А.* О дисперсионных свойствах и структуре полей собственных мод неоднородных плазменных волноводов в продольном магнитном поле // Изв. вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49, № 7. С. 607–617.
41. *Вдовиченко И. А., Марков Г. А.* Особенности дисперсионных характеристик неоднородных плазменных волноводов в продольном магнитном поле // Изв. вузов. Радиофизика. 2008. Т. 51, № 5. С. 434–446.
42. *Галеев А. А., Сагдеев Р. З.* Нелинейная теория плазмы // Вопросы теории плазмы. Вып. 7. М. : Атомиздат, 1973. С. 3–145.
43. *Петвиашвили В. И.* Нелинейные волны и солитоны // Вопросы теории плазмы. Вып. 9. М. : Атомиздат, 1979. С. 59–82.
44. *Гильденбург В. Б., Семенов В. Е.* Стационарные структуры неравновесного высокочастотного разряда в квазистатических полях // Физика плазмы. 1980. Т. 6, № 2. С. 445–452.
45. *Литвак А. Г.* Динамические нелинейные электромагнитные явления в плазме // Вопросы теории плазмы. Вып. 10. М. : Атомиздат, 1980. С. 164–242.
46. Взаимодействие сильных электромагнитных волн с бесстолкновительной плазмой / под ред. А. Г. Литвака. Горький : ИПФ АН СССР, 1980. 216 с.
47. *Ораевский В. Н.* Параметрические неустойчивости магнитоактивной плазмы // Основы физики плазмы. Т. 2. М. : Энергоатомиздат, 1984. С. 7–48.
48. Высокочастотный разряд в волновых полях / под ред. А. Г. Литвака. Горький : ИПФ АН СССР, 1988. 298 с.
49. *Марков Г. А., Миронов В. А., Сергеев А. М.* О самоканализации плазменных волн в магнитном поле // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 29, № 11. С. 672–676.
50. *Марков Г. А., Миронов В. А., Сергеев А. М., Соколова И. А.* Многопучковая самоканализация плазменных волн // ЖЭТФ. 1981. Т. 80, № 6. С. 2264–2271.
51. *Вдовиченко И. А., Марков Г. А., Миронов В. А., Сергеев А. М.* Ионизационная самоканализация вистлеров в плазме // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 44, № 5. С. 216–219.

52. *Марков Г. А., Белов А. С.* Демонстрация нелинейных волновых явлений в плазме лабораторной модели ионосферно-магнитосферного дакта плотности // УФН. 2010. Т. 180, № 7. С. 735–744.
53. *Агафонов Ю. Н., Бабаев А. П., Бажанов В. С. и др.* Плазменно-волновой разряд в ионосфере Земли // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15, № 17. С. 1–5.
54. *Белов А. С., Марков Г. А., Попова Л. Л., Чугунов Ю. В.* Генерация электромагнитных колебаний на частотах нижегибридного и баунс резонанса в пробочных магнитных ловушках (лабораторные и ракетные эксперименты) // Геомагнетизм и аэрномия. 2009. Т. 49, № 2. С. 199–208.
55. *Агафонов Ю. Н., Бажанов В. С., Исякаев В. Я. и др.* Стимулирование высыпания энергичных частиц плазменно-волновым разрядом в полярной ионосфере // Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 52, № 10. С. 1127–1130.
56. *Кудрин А. В., Марков Г. А., Трахтенгерц Ю. В., Чугунов Ю. В.* Эффекты вторичного излучения при воздействии на ионосферу интенсивным электромагнитным пучком // Геомагнетизм и аэрномия. 1991. Т. 31, № 2. С. 334–340.
57. *Марков Г. А.* Генерация НЧ полей модулированным пучком плазменных волн, формирующих ВЧ разряд в магнитном поле // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. 41, № 2. С. 243–252.
58. *Марков Г. А.* Ионизационное самоканалирование модулированных плазменно-волновых пучков в магнитном поле // ЖЭТФ. 1998. Т. 113, № 4. С. 1289–1298.
59. *Chugunov Yu. V., Markov G. A.* Active plasma antenna in the Earth's ionosphere // J. Atmos. Sol.-Terr. Phys. 2001. V. 63. P. 1775–1787.
60. *Марков Г. А., Чугунов Ю. В.* Резонансный плазменно-волновой разряд в ионосфере Земли // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2001. Т. 9, № 2. С. 60–75.
61. *Заборонкова Т. М., Краффт К., Кудрин А. В., Лях М. Ю.* Излучение волн свистового диапазона модулированным электронным пучком в столкнови-

тельной магнитоактивной плазме при наличии дукта плотности // Изв. вузов. Радиофизика. 2005. Т. 48, № 9. С. 730–742.

62. *Кудрин А. В., Курина Л. Е., Марков Г. А.* Ионизационное самоканалирование свистовых волн в столкновительной замагниченной плазме // ЖЭТФ. 1997. Т. 112, № 4. С. 1285–1298.

63. *Кудрин А. В., Курина Л. Е., Петров Е. Ю.* Ионизационное формирование плазменной неоднородности ближним полем источника магнитного типа в замагниченной плазме // ЖЭТФ. 2001. Т. 119, № 6. С. 1118–1128.

64. *Birdsall C. K., Langdon A. B.* Plasma Physics via Computer Simulation. Abingdon : CRC Press, 2004. 504 p.

65. *Jardin S.* Computational Methods in Plasma Physics. London : Chapman & Hall/CRC, 2010. 372 p.

66. *Pipes L. A., Harvill L. R.* Applied Mathematics for Engineers and Physicists. Mineola : Dover Publications, 2014. 1040 p.

67. *Harrington R. F.* Field Computation by Moment Methods. Hoboken : Wiley/IEEE Press, 1993. 240 p.

68. *Burke G. J., Poggio A. J.* Numerical Electromagnetics Code (NEC)—Method of Moments : in 3 parts. Livermore : Lawrence Livermore Laboratory, 1981. Part 1. 81 p. ; Part 2. 433 p. ; Part 3. 179 p.

69. Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics / W. C. Chew, J. M. Jin, E. Michielssen, J. M. Song (Eds.). Norwood : Artech House, 2001. 950 p.

70. *Gibson W. C.* The Method of Moments in Electromagnetics. London : Chapman & Hall/CRC press, 2007. 288 p.

71. *Ergül Ö., Gürel L.* The Multilevel Fast Multipole Algorithm (MLFMA) for Solving Large-Scale Computational Electromagnetics Problems. Hoboken : Wiley/IEEE Press, 2014. 470 p.

72. *Jin J.-M.* The Finite Element Method in Electromagnetics. Hoboken : Wiley/IEEE Press, 2014. 876 p.

73. *Liu Y.* Fast Multipole Boundary Element Method. Cambridge : Cambridge University Press, 2014. 254 p.
74. *Burke G. J., Miller E. K., Poggio A. J.* The numerical electromagnetics code (NEC)—A brief history // Proc. Antennas Propag. Soc. Int. Symp. 2004. V. 3. P. 2871–2874.
75. *Chew W. C.* Vector potential electromagnetics with generalized gauge for inhomogeneous media: formulation (invited paper) // PIER. 2014. V. 149. P. 69–84.
76. Научные достижения Российской академии наук в 2012 году // Отчетный доклад Президиума Российской академии наук [Электронный ресурс]. <http://www.ras.ru/FStorage/Download.aspx?id=97cfff27-6174-4c69-a50a-17f0dfbb2b4e>.
77. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М. : Наука, 1982. 620 с.
78. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. : Физматгиз, 1963. 1100 с.
79. *Кондратенко А. Н.* Плазменные волноводы. М. : Атомиздат, 1976. 232 с.
80. *Watson G. N.* A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge : Cambridge University Press, 1995. 814 p.
81. *Вайнштейн Л. А.* Электромагнитные волны. М. : Радио и связь, 1988. 442 с.
82. *Kudrin A. V., Zaitseva A. S., Zaboronkova T. M., Zilitinkevich S. S.* Current distribution and input impedance of a strip loop antenna located on the surface of a circular column filled with a resonant magnetoplasma // Progress In Electromagnetics Research B. 2013. V. 55. P. 241–256.
83. *Гершман Б. Н.* Динамика ионосферной плазмы. М. : Наука, 1974. 256 с.
84. *Жилинский А. П., Цендин Л. Д.* Столкновительная диффузия частично ионизованной плазмы в магнитном поле // УФН. 1980. Т. 131, № 3. С. 343–385.

85. *Рожанский В. А., Цендин Л. Д.* Столкновительный перенос в частично-ионизованной плазме. М. : Энергоатомиздат, 1988. 248 с.
86. *Гуревич В. А., Шварцбург А. Б.* Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере. М. : Наука, 1973. 272 с.
87. *Райзер Ю. П.* Физика газового разряда. М. : Наука, 1987. 592 с.
88. *Anderson D., Jordan U., Lisak M., et al.* Microwave breakdown in resonators and filters // IEEE Trans. Microw. Theory Tech. 1999. V. 47, № 12. P. 2547–2556.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в рецензируемых журналах

A1. Широков Е. А., Чугунов Ю. В. Нестационарное квазиэлектростатическое поле излучения дипольных антенн в магнитоактивной плазме в резонансной полосе частот // Изв. вузов. Радиофизика. 2011. Т. 54, № 7. С. 510–521.

A2. Широков Е. А., Чугунов Ю. В. Возбуждение и распространение электромагнитного импульса в магнитоактивной плазме в нижнегибридном диапазоне частот // Космические исследования. 2013. Т. 51, № 1. С. 73–80.

A3. Чугунов Ю. В., Широков Е. А., Фомина И. А. К теории короткой цилиндрической антенны в анизотропных средах // Изв. вузов. Радиофизика. 2015. Т. 58, № 5. С. 352–361.

A4. *Shirokov E. A.* Computations of the input impedance of antennas in cold magnetoplasmas in nongyrotropic and quasi-stationary cases using the method of moments // IEEE Trans. Antennas Propag. 2015. V. 63, № 12. P. 5846–5849.

A5. Широков Е. А., Чугунов Ю. В. Модель динамики плазменно-волновых каналов в магнитоактивной плазме // Изв. вузов. Радиофизика. 2016. Т. 59, № 1. С. 25–36.

A6. Чугунов Ю. В., Широков Е. А. Квазистатический диполь в магнитоактивной плазме в резонансной полосе частот. Отклик приемной антенны и распределение заряда на антенном проводе // Космические исследования. 2016. Т. 54, № 3. С. 209–216.

Статьи в сборниках трудов конференций

A7. Широков Е. А., Чугунов Ю. В. Аномальное распыление и групповое запаздывание импульсного сигнала, распространяющегося в плазменном волноводе во внешнем магнитном поле // Труды XVII научной конференции по радиофизике, посвящённой 100-летию со дня рождения В. С. Троицкого. Нижний Новгород, 2013. С. 21–23.

A8. *Shirokov E. A., Chugunov Yu. V.* Dynamics of plasma-wave channels in magnetized plasmas [Электронный ресурс] // 41st EPS Conference on Plasma Physics : proceedings. Berlin, 2014. <http://ocs.ciemat.es/EPS2014PAP/pdf/P4.113.pdf>.

A9. *Shirokov E. A.* Computations of the input impedance of antennas in a magnetoplasma using the method of moments // XXXI URSI General Assembly and Scientific Symposium : proceedings. Beijing, 2014. doi:10.1109/URSIGASS.2014.6929736.

A10. *Shirokov E. A.* Application of the method of moments to the analysis of radiation from metal and plasma antennas in conditions typical for the near-Earth plasma // 1st URSI Atlantic Radio Science Conference : proceedings. Gran Canaria, 2015. doi:10.1109/URSI-AT-RASC.2015.7303150.

Тезисы докладов

A11. Чугунов Ю. В., Широков Е. А. Нестационарное резонансное квазиэлектростатическое поле излучения дипольных антенн в магнитоактивной плазме в резонансной полосе частот // Научная студенческая конференция Высшей школы общей и прикладной физики ННГУ «ВШОПФ'2011» : тезисы докладов. Нижний Новгород, 2011. С. 18.

A12. Чугунов Ю. В., Широков Е. А. Нестационарное квазиэлектростатическое поле излучения дипольных антенн в магнитоактивной плазме в резонансной полосе частот // 7-я ежегодная конференция «Физика плазмы в Солнечной системе» : тезисы докладов. Москва, 2012. С. 169.

A13. Широков Е. А., Чугунов Ю. В. Возбуждение квазиэлектростатических

волн в плазменном волноводе импульсным источником в нижнегибридном диапазоне частот // 8-я ежегодная конференция «Физика плазмы в Солнечной системе» : тезисы докладов. Москва, 2013. С. 163–164.

A14. Широков Е. А., Чугунов Ю. В. Формирование плазменно-волновых каналов при ионизационном самовоздействии квазиэлектростатических волн в неоднородной магнитоактивной плазме // 9-я ежегодная конференция «Физика плазмы в Солнечной системе» : тезисы докладов. Москва, 2014. С. 144–145.

A15. *Shirokov E. A., Chugunov Yu. V.* Dynamics of plasma-wave channels in magnetized plasmas [Электронный ресурс] // 41st EPS Conference on Plasma Physics : abstracts. Berlin, 2014. <http://ocs.ciemat.es/EPS2014ABS/pdf/P4.113.pdf>.

A16. Широков Е. А., Чугунов Ю. В. Динамика плазменно-волновых каналов в магнитоактивной плазме в условиях резонанса // 10-я ежегодная конференция «Физика плазмы в Солнечной системе» : тезисы докладов. Москва, 2015. С. 153–154.

A17. Широков Е. А., Чугунов Ю. В. Излучение плазменно-волнового канала в условиях ионосферы Земли // 11-я ежегодная конференция «Физика плазмы в Солнечной системе» : тезисы докладов. Москва, 2016. С. 129–130.

A18. *Shirokov E. A., Chugunov Yu. V.* Dynamics of plasma-wave channels in the resonant frequency range in the Earth's ionosphere // 39th Annual Seminar "Physics of Auroral Phenomena" : abstracts. Apatity, 2016. P. 38.